

## تعریفی

۱. کدام مقیاس دارای صفر قراردادی است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۴، برنامه ریزی شهری ۸۹)

- (۱) اسمی (۲) فاصله‌ای (۳) رتبه‌ای (۴) نسبی

۲. در بررسی‌های آماری، کدام بیان درست است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۹)

- (۱) اولین گام در هر تحقیق علمی جمع‌آوری داده‌هاست.  
(۲) موضوع آمار توصیفی، تحلیل نمونه است.  
(۳) شاخص آماره با سرشماری حاصل می‌شود.  
(۴) دقت پارامتر از آماره بیش‌تر است.

۳. در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط 16، باشد فراوانی مطلق در دسته چهارم کدام است؟

(حسابداری و مدیریت ۸۷)

مرکز دسته	9	12	15	18	21
فراوانی تجمعی	8	25	a	58	75

- (۱) 24 (۲) 21 (۳) 19 (۴) 17

۴. کمترین و بیشترین داده آماری 23 و 44 است اگر این داده‌ها را در 7 طبقه دسته‌بندی کنیم حدود دسته وسط کدام است؟ (GIS ۷۹)

- (۱) 32 - 35 (۲) 31 - 34 (۳) 32 - 34 (۴) 33 - 35

۵. در یک جدول توزیع، فراوانی کل برابر 50 و فراوانی تجمعی طبقه چهارم و پنجم 12 و 16 می‌باشد. درصد فراوانی نسبی طبقه پنجم کدام است؟ (GIS ۷۹)

- (۱) 7.5 (۲) 8 (۳) 10 (۴) 12.5

## میان و مد

۶. در یک نمونه‌گیری  $N = 1461$ ، استفاده از پارک محله‌ای توزیع زیر را نشان می‌دهد: (برنامه ریزی شهری ۹۰)

میزان استفاده	T
هرگز	750
یک بار در ماه	324
یک بار در هفته	350
هر روز	37

نما در این نمونه چقدر است؟

- (۱) 15 (۲) 37 (۳) 337 (۴) 750

۷. مقدار مُد در داده‌های آمار دسته‌بندی شده زیر کدام است؟ (GIS ۹۱)

- (۱) 24.8  
(۲) 24.5  
(۳) 24.4  
(۴) 25.2

حدود دسته	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35
فراوانی	17	18	25	12	13

۸. در جدول توزیع فراوانی زیر اختلاف میان‌ه از مُد جامعه کدام است؟ (GIS ۹۲)

حدود دسته	14-17	17-20	20-23	23-26	26-29
فراوانی	10	17	25	18	10

- (۱) 0.02 (۲) 0.03  
(۳) 0.04 (۴) 0.05

۹. در داده‌های آماری پیوسته و دسته‌بندی شده با توزیع فراوانی زیر فزونی میان‌ه از مد جامعه کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۲)

حدود دسته	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
فراوانی	8	12	20	8	12

- (۱) 0.3 (۲) 0.4  
(۳) 0.5 (۴) 0.2

۱۰. خاصیت مهم میان‌ه آن است که: (مدیریت ۸۲)

- (۱) مجموع انحرافات از میان‌ه صفر است.  
(۲) تعداد انحرافات از میان‌ه حداقل است.  
(۳) مجذور انحرافات از میان‌ه حداقل است.

۴) مجموع قدرمطلق انحرافات از میانه حداقل است.

۱۱) در داده آماری میانه  $Md = 12$  و  $\sum_{i=1}^{50} x_i = 550$  است، اگر  $A = \sum_{i=1}^{50} |x_i - 12|$  و  $B = \sum_{i=1}^{50} |x_i - 11|$  آن گاه:

(مدیریت ۸۴)

$A < B$  (۱)       $A = B$  (۲)       $A > B$  (۳)       $A = B - 1$  (۴)

۱۲) در صورتی که به بزرگ ترین عدد یک سری داده مقدار ثابتی اضافه گردد، این افزایش بر کدام معیار تأثیر نمی گذارد؟ (اقتصاد ۸۰)

(۱) ضریب پراکندگی      (۲) میانه      (۳) میانگین      (۴) واریانس

۱۳) مشاهدات  $x_1, x_2, 15, x_4, x_5$  دارای انحراف معیار صفر هستند. آنگاه میانه مشاهدات  $(2x_1 + 1), (2x_2 + 1), \dots, (2x_5 + 1)$  برابر است با: (اقتصاد ۸۷)

18 (۱)      21 (۲)      24 (۳)      31 (۴)

۱۴) اگر داده ها به صورت 1, 3, 5, 6, 8, 7, 10, 100 باشد، کدام شاخص مرکزی نماینده ای بهتر برای داده ها است؟ (برنامه ریزی شهری ۷۹)

(۱) مد      (۲) میانه      (۳) نما      (۴) چارکها

### چندکها

۱۵) متغیرهای پیوسته در جدول زیر گروه بندی شده اند. متغیر 80 درصدی داده ها کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۹)

حدود دسته	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
فراوانی	5	10	9	11	8	7

26.225 (۴)      26.125 (۳)      25.625 (۲)      25.875 (۱)

۱۶) داده های آماری پیوسته یک پژوهش در جدول زیر گروه بندی شده اند. چند درصد داده ها کم تر از 36.5 است؟ (GIS۸۹)

حدود دسته	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
فراوانی	12	17	19	20	15	7

64 (۴)      63 (۳)      60 (۲)      56 (۱)

### میانگین هارمونیک

۱۷) راننده ای  $\frac{1}{3}$  مسافت بین دو شهر را با سرعت 80،  $\frac{1}{4}$  این مسافت را با سرعت 90 و بقیه مسافت را با سرعت 120 طی کرده است.

سرعت متوسط این راننده کدام است؟ (GIS۹۰)

96 (۱)      98 (۲)      97.3 (۳)      99.1 (۴)

۱۸) در یک کارگاه، 13 دستگاه تراش موجود است. یک قطعه خاص، در زمان های جدول داده شده توسط این دستگاهها تراش داده می شود، میانگین هارمونیک مدت زمان لازم برای تراش کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۱)

مدت زمان	20	25	30
تعداد	2	5	6

26.2 (۱)      26.3 (۲)

26 (۳)      25.8 (۴)

۱۹) سرعت 10 ماشین بر حسب دور ثانیه مطابق جدول زیر است. میانگین هارمونیک این سرعتها کدام است؟

(برنامه ریزی شهری ۹۱)

سرعت	8	9	16	18
تعداد	3	2	2	3

11.25 (۱)      11.5 (۲)

12 (۴)      11.75 (۳)



۲۱. میانگین پیراسته چگونه محاسبه می‌شود؟ (برنامه ریزی شهری ۹۰)

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i m_i}{N} \quad (۲) \quad \bar{X} = \frac{\sum m_i x_i}{N} \quad (۱)$$

(۳) از طریق محاسبه میانگین دهک‌ها

(۴) مشاهدات کوچک‌تر از چارک اول و بزرگ‌تر از چارک سوم حذف شده و میانگین مشاهدات باقی مانده محاسبه می‌شود.

۲۲. میانگین داده‌ها در جدول زیر، با روش غیرمستقیم و ساده‌تر کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۱)

نماینده طبقه	219	235	251	267	283
فراوانی	30	25	24	27	14

248 (۱) 247.5 (۲)

248.5 (۳) 247 (۴)

۲۳. در جدول توزیع فراوانی زیر، داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیش‌تر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های باقیمانده کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۲)

x	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	33-37
f	9	11	15	18	14	13

26.8 (۳)

26.2 (۳)

25.9 (۲)

25.8 (۱)

۲۴. داده‌های آماری به صورت نمودار شاخه و برگ زیر داده شده است. با حذف 25 درصدی پایین و 25 درصدی بالا، تفاضل میانه از میانگین پیراسته کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۳)

شاخه	برگ
7	1 1 2 4 7 9
8	0 0 3 5 6 7
9	2 4 5 5 7 8

0.4 (۱)

0.2 (۲)

0.3 (۳)

0.1 (۴)

۲۵. با توجه به جدول توزیع فراوانی داده‌های آماری، میانگین U از رابطه  $x = 4U + 51$ ، کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۳)

x	41-45	45-49	49-53	53-57	57-61
f	9	12	17	10	16

0.1725 (۴)

0.1825 (۳)

0.1775 (۲)

0.1875 (۱)

۲۶. داده‌های آماری دسته‌بندی شده زیر با فراوانی تجمعی نسبی زیر داده شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟ (GIS۹۳)

حدود دسته	31-37	37-43	43-49	49-55	55-61
فراوانی تجمعی نسبی	0.2	0.35	0.65	0.85	1

45.7 (۲)

45.2 (۱)

46.2 (۴)

46.1 (۳)

۲۷. جدول توزیع فراوانی زیر را در نظر بگیرید. اگر  $\mu = 2$  و  $N = 28$  باشد، مقادیر a و b عبارتند از:

(اقتصاد ۸۱)

$x_i$	0	1	2	3	4
$F_i$	3	a	10	b	3

a = 5, b = 7 (۲)

a = b = 6 (۱)

a = 4, b = 8 (۴)

a = b = 7 (۳)

۲۸. توزیع فراوانی هزینه متوسط ماهانه خانوارها در جدول زیر داده شده است:

هزینه متوسط	380	210	85	60	35	15
تعداد خانوار	1	2	5	12	48	32

(اقتصاد ۸۶)

میانگین هزینه 20% از پرخرج‌ترین خانوارها چقدر است؟

108.15 (۴)

97.25 (۳)

41.05 (۲)

19.45 (۱)

۲۹. اگر میانگین داده‌های:  $2x_1 - 3, 2x_2 - 3, \dots, 2x_{20} - 3$  برابر 29 باشد، آن‌گاه  $\sum x_i$  کدام خواهد بود؟ (حسابداری ۷۷)

640 (۴)

480 (۳)

320 (۲)

280 (۱)

۴۰. کدام گزینه، یکی از خواص مهم مشخصه میانگین می‌باشد؟ (اقتصاد ۷۹)

(۱) برای هر توزیع، میانگین حساسی از نما کوچک‌تر است.

(۲) در هر توزیع، حاصل جمع قدرمطلق انحرافات مقادیر متغیر از میانگین به حداقل می‌رسد.

- ۳) در هر توزیع، مجموع مجذورات تفاضل‌های مقادیر متغیر از میانگین به حداقل می‌رسد.  
 ۴) در هر توزیع، مجموع توان سوم انحرافات مقادیر متغیر از میانگین حسابی به حداقل می‌رسد.

## رابطه بین میانگین‌ها

۴۱. کدام رابطه میانگین‌های چهار عدد 9 و 8 و 6 و 3 برقرار است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۳)
- (۱) حسابی < هارمونیک < هندسی  
 (۲) حسابی < هندسی < هارمونیک  
 (۳) هارمونیک < حسابی < هندسی  
 (۴) هندسی < هارمونیک < حسابی

## دامنه تغییرات

۴۲. اگر به هر داده آماری 2 واحد افزوده شود برای دامنه تغییرات کدام حالت پیش می‌آید؟ (GIS ۸۰)
- (۱) ثابت (۲) 2 واحد افزایش (۳) 4 واحد افزایش (۴) 2 برابر

## انحراف چارکی

۴۳. انحراف چارکی داده‌های طبقه‌بندی شده در جدول زیر کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۰)

حدود دسته	< 10	10-14	14-18	18-22	22-26	> 26	4.21 (۲)	4.63 (۱)
فراوانی	6	12	15	14	8	5	4.85 (۴)	4.71 (۳)

۴۴. در 500 داده آماری، انحراف چارکی 12.7 محاسبه شده است. اگر داده کم‌تر از 41.6 باشد آنگاه حدوداً 375 داده کوچک‌تر یا مساوی کدام است؟ (GIS ۹۰)
- (۱) 56 (۲) 65 (۳) 67 (۴) 76

۴۵. دو نمونه از ساختمان‌های منطقه ۱ و منطقه ۱۹ شهر برای مقایسه نوع سازه بناهای این دو منطقه گرفته شده است. انحراف چارکی با semi-interquartile برای مقایسه این دو نمونه چگونه محاسبه می‌شود؟ (برنامه ریزی شهری ۹۰)

(۱) جذر واریانس

$$\frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x}_{19})^2}{n-1} \quad (۲)$$

(۳) نصف دامنه تغییرات در حالی که دامنه تغییرات برابر است با  $x_{\max} - x_{\min}$  برای هر یک از نمونه‌ها

(۴) نصف دامنه چارک‌ها در حالی که دامنه چارک‌ها برابر است با  $Q_3 - Q_1$  برای هر یک از نمونه‌ها

۴۶. در 640 داده آماری انحراف چارکی 3.8 محاسبه شده است. اگر داده کم‌تر از 35.4 باشند آنگاه حدوداً 480 داده کم‌تر از کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۱)

(۱) 39 (۲) 41 (۳) 43 (۴) 45

۴۷. نمرات دقت مهندسیین ناظر از صفر تا 20 در جدول زیر طبقه‌بندی شده است. انحراف چارکی این نمرات کدام است؟

(برنامه ریزی شهری ۹۱)

فاصله طبقات	< 8	8-11	11-14	14-17	≥ 17	2.83 (۲)	2.94 (۱)
فراوانی	11	15	20	27	11	2.45 (۴)	2.52 (۳)

۴۸. با توجه به نمرات پرسش‌نامه توزیعی بین مسئولین شهری در جدول زیر، انحراف چارکی کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۳)

حدود دسته	< 6	6-9	9-12	12-15	15-18	≥ 18
فراوانی	5	7	10	15	12	3

(۱) 3.1 (۲) 2.9 (۳) 2.8 (۴) 2.7

۴۹. در جدول توزیع فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده زیر، انحراف چارکی کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۴)

حدود دسته	< 12	12-14	14-16	16-18	≥ 18
فراوانی	5	9	10	12	8

(۱) 1.98 (۲) 2.08 (۳) 2.12 (۴) 2.14

## نیمه واریانس

۵۰. سود شرکتی در 12 ماه سال به ترتیب 0, 9, 5, 8, 12, 7, 4, 5, 6, 2, 4, 10 می‌باشد. واریانس داده‌های نامطلوب کدام است؟

(مدیریت و حسابداری ۸۹)

10.33 (۱) 10.82 (۲) 11.63 (۳) 13.20 (۴)

۵۱. در داده‌های آماری 15, 20, 12, 18, 16, 15, 14, 21, 13 واریانس داده‌های کم‌تر از میانگین کدام است؟ (GIS۹۳)

5.8 (۱) 6 (۲) 6.2 (۳) 6.4 (۴)

## واریانس و انحراف معیار

۵۲. واریانس نمونه متشکل از چهار عدد 6751231 و 6751228 و 6751234 و 6751235، کدام است؟ (GIS۹۰)

12.5 (۴) 9 (۲) 12 (۳)

۵۳. میانگین قطر دایره‌هایی 10 واحد با انحراف معیار 2.5 می‌باشد، میانگین مساحت این دایره‌ها چند برابر  $\pi$  است؟

(مدیریت و حسابداری ۸۹)

30.25 (۱) 31.25 (۲) 30 (۳) 27.5 (۴)

۵۴. اگر امید ریاضی X برابر 2.5 و امید ریاضی  $X^2$  برابر 7.5 باشد واریانس  $(-2X + 5)$  کدام است؟ (GIS۹۱)

5 (۱) 6 (۲) 4.5 (۳) 5.5 (۴)

۵۵. اگر  $\bar{x}$  میانگین n داده آماری  $x_i$  باشد، حاصل عبارت  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{x}^2$  برابر کدام است؟

(مدیریت و حسابداری ۹۳)

(۱) انحراف متوسط از میانگین (۲) نیمه واریانس (۳) همواره مثبت (۴) صفر

۵۶. کدام پارامتر تحت تأثیر انحراف بزرگ است؟

(۱) واریانس (۲) نیم دامنه

(۴) انحراف متوسط از میانگین

(۳) انحراف چارکی

۵۷. داده‌های آماری به صورت شاخه و برگ زیر، نشان داده شده است. در نمودار جعبه‌ای این داده‌ها، واریانس داده‌های داخل جعبه، تقریباً کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۴)

شاخه	برگ
4	1 1 2 4 6 8
5	0 2 2 3 5 6
6	0 0 1 4 5 7 9

14.9 (۱) 15.1 (۲) 15.3 (۳) 16.2 (۴)

۵۸. متغیر تصادفی x دارای میانگین 5 و واریانس 9 می‌باشد، میانگین و واریانس  $\frac{x-5}{3}$  به ترتیب از (راست به چپ) کدام است؟

(حسابداری ۸۰)

1, 0 (۱) 0, 1 (۲) 3, 5 (۳) 9, 5 (۴)

۵۹. میانگین قد دانش‌آموزان مدرسه‌ای 120 سانتی‌متر با واریانس 100 است. اگر هر فرد 14% قدش در سال آینده بلند شود، میانگین و واریانس قد آن‌ها در سال آینده چقدر خواهد بود؟ (از راست به چپ) (حسابداری ۸۲)

100, 120 (۱) 120, 114 (۲)

136.8, 114 (۳) 129.96, 136.8 (۴)

۶۰. حقوق پرداختی به کارمندان شرکت آلفا به طور متوسط 15 هزار تومان با انحراف معیار 3 هزار تومان است. اگر 20% میانگین به حقوق کارمندان اضافه شود، به ترتیب میانگین و انحراف معیار حقوق پرداختی چقدر خواهد شد؟ (اقتصاد ۷۰)

3, 15.3 (۱) 3.6, 15.3 (۲) 3, 18 (۳) 3.6, 18 (۴)

## تصحیح شیارد

۶۱. در داده‌های طبقه‌بندی شده با متغیرهای پیوسته و توزیع فراوانی اندکی متقارن، فاصله طبقات 6، تعداد جامعه 2400 و مقدار میانگین و واریانس به ترتیب 25 و 12 محاسبه شده است. واریانس تصحیح شده شیارد، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۷)

11.25 (۱) 10.5 (۲) 10 (۳) 9 (۴)

۶۲. تصحیح شپارد در مورد واریانس N داده از متغیر پیوسته در مواردی به کار می‌رود که  $N > \dots\dots\dots$  و تابع توزیع فراوانی  $\dots\dots\dots$  باشد.

(۱) 100 - اندکی متقارن (۲) 100 - غیرمقارن

(۳) 1000 - اندکی متقارن (۴) 1000 - غیرمقارن

۶۳. در داده‌های آماری دسته‌بندی شده با متغیر پیوسته، تعداد داده‌ها خیلی زیاد و تابع توزیع فراوانی اندکی متقارن است، واریانس محاسبه شده با مقایسه واریانس واقعی چگونه است؟ (GIS ۸۶)

(۱) همواره بیشتر (۲) همواره کمتر (۳) دقیقاً برابر (۴) کمتر یا بیشتر

### میانگین کل ، واریانس کل

۶۴. میانگین یک سری مشاهده که شامل 20 مشاهده است، برابر 100 و میانگین یک سری مشاهده دیگر که شامل 30 مشاهده است، برابر 300 است. میانگین کل این مشاهدات برابر است با: (اقتصاد ۹۰)

(۱) 250 (۲) 215 (۳) 220 (۴) 200

۶۵. واریانس کل داده‌ها، متشکل از سه گروه جدول روبه‌رو کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

(۱) 48.4 (۲) 47.5

(۳) 45.8 (۴) 45

N	100	200	700
$\mu$	14	18	20
$\sigma^2$	50	60	40

۶۶. اگر مشاهداتی به تعداد 100 و 200 و 450 به ترتیب با واریانس‌های 16 و 25 و 20 به صورت جامعه‌ای واحد ترکیب شوند در صورتی که میانگین این مشاهدات متفاوت باشند کدام عدد برای واریانس جامعه کل مورد قبول است؟ (برنامه ریزی شهری ۸۸)

(۱) 19.8 (۲) 20.6 (۳) 20.8 (۴) 22.1

۶۷. اگر سه جامعه با تعداد مشاهدات 25، 30 و 45 با میانگین‌های برابر و واریانس آنها به ترتیب 2.04 و 3.1 و 4 به صورت یک جامعه واحد در نظر گرفته شود. انحراف معیار این جامعه کدام است؟ (GIS ۸۴)

(۱) 1.6 (۲) 1.7 (۳) 1.8 (۴) 1.9

### قضیه چی بی شف

۶۸. میانگین و واریانس نمرات مسئولیت‌پذیری کارکنان یک سازمان به ترتیب 72 و 9 محاسبه شده است. بنابر قانون چی بی شف چند درصد نمرات کارکنان در بازه (67, 77) قرار دارد؟ (مدیریت و حسابداری ۹۰)

(۱) 64 (۲) 54 (۳) 76 (۴) 84

۶۹. میانگین نمرات مهارت در یک گروه صنعتی 67 است و حداقل 36 درصد نمرات در بازه (62, 72) قرار دارند. طبق قانون چی بی شف واریانس جامعه کدام است؟ (GIS ۹۰)

(۱) 12 (۲) 15 (۳) 16 (۴) 25

۷۰. اگر میانگین هزینه مصرفی خانوارهای شهری 210 با انحراف معیار 40 باشد، احتمال اینکه خانوارها دارای هزینه مصرفی بین 130 تا 290 باشند، حداقل چقدر است؟ (اقتصاد ۹۰)

(۱)  $\frac{8}{9}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{1}{9}$

۷۱. در بررسی داده‌های آمار با میانگین 56 و انحراف معیار 7.2 طبق قانون چی بی شف، حداقل چند درصد داده‌ها در بازه (47, 65) قرار می‌گیرد؟ (مدیریت و حسابداری ۹۱)

(۱) 40 (۲) 54 (۳) 36 (۴) 45

۷۲. در 50 داده آماری مجموع داده‌ها 900 و مجموع مربعات این داده‌ها 17000 می‌باشد. بنابر قضیه چی بی شف حداقل چند درصد مشاهدات در بازه (8, 28) قرار دارد؟ (GIS ۹۲)

(۱) 72 (۲) 75 (۳) 84 (۴) 96



۷۳. اگر میانگین متغیر تصادفی  $X$  برابر 5 و واریانس آن مساوی 4 باشد، اندازه  $p(|x-5| > 6)$  کدام است؟ (اقتصاد ۹۲)

- (۱) بزرگ تر و مساوی  $\frac{4}{3}$  (۲) کوچک تر و مساوی  $\frac{1}{9}$  (۳) کوچک تر و مساوی  $\frac{1}{8}$  (۴) بزرگ تر و مساوی  $\frac{7}{8}$

۷۴. نمرات سنجش مهارت کارکنان یک شرکت، با میانگین 71 و واریانس 16 می باشد. حداقل 36 درصد نمرات این کارکنان، طبق قضیه چی بی شف، در کدام بازه است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۳)

- (۱) (67, 75) (۲) (65, 77) (۳) (66, 76) (۴) (64, 78)

۷۵. چنانچه جامعه‌ای نرمال نباشد، فاصله  $\mu \pm 3\sigma$  حداقل شامل چند درصد داده‌ها است؟ (اقتصاد ۹۳)

- (۱) 75% (۲) 88.8% (۳) 94.4% (۴) 99.7%

### ضریب پراکندگی (تغییرات)

۷۶. در 75 داده آماری  $\sum_{i=1}^{75} (x_i - 15) = 0$  و  $\sum_{i=1}^{75} (x_i - 15)^2 = 432$  می باشد. اگر ضریب پراکندگی داده‌های  $y_i = \frac{1}{2}x_i + a$  برابر

- 0.2 باشد، کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۹)  
(۱) 1.5 (۲) -1.5 (۳) 2 (۴) -2

۷۷. در 45 داده آماری مجموع تمام داده‌ها 81 و مجموع مربعات این داده‌ها 405 می باشد. ضریب پراکندگی متغیرهای جدیدی که هر

یک از  $\frac{3}{2}$  داده‌های مفروض 4.5 واحد بیش تر باشد، کدام است؟ (GIS ۸۹)

- (۱) 0.125 (۲) 0.225 (۳) 0.25 (۴) 0.5

۷۸. در 40 داده آماری مجموع تمام داده‌ها 168 و مجموع مجذورات این داده‌ها 808 می باشد. ضریب پراکندگی این داده‌ها کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۸۹)

- (۱) 0.38 (۲) 0.25 (۳) 0.35 (۴) 0.42

۷۹. میانگین طول مربع‌هایی برابر 12 و ضریب پراکندگی آن‌ها 0.25 می باشد. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

(مدیریت و حسابداری ۹۰)

(برنامه ریزی شهری ۹۱)

- (۱) 152 (۲) 148 (۳) 149 (۴) 153

۸۰. در مقایسه شهرنشینی شهرهای ایران هر چقدر ضریب تغییر Coefficient of Variation کم تر باشد، ..... است.

(برنامه ریزی شهری ۹۰)

- (۱) پراکندگی کم تر (۲) پراکندگی بیش تر (۳) توزیع فراوانی متعادل تر (۴) توزیع فراوانی نامتوازن تر

۸۱. در 60 داده آماری مجموع تمام داده‌ها 480 و مجموع مجذورات این داده‌ها 4380 می باشد، ضریب تغییرات کدام است؟

(GIS ۹۱)

- (۱) 0.325 (۲) 0.375 (۳) 0.675 (۴) 0.625

۸۲. در داده‌های  $x_i: i=1, 2, \dots, n$  با میانگین 36، ضریب پراکندگی 0.25 است. ضریب پراکندگی در داده‌های  $y_i = 2x_i + 3$  کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۲)

- (۱) 0.20 (۲) 0.24 (۳) 0.27 (۴) 0.36

۸۳. میانگین اندازه اضلاع مربع‌هایی 12 و میانگین مساحت این مربع‌ها 153 می باشد. ضریب پراکندگی در اندازه اضلاع این مربع‌ها کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۲)

- (۱) 0.15 (۲) 0.25 (۳) 0.2 (۴) 0.3

۸۴. برای تشخیص آن که در دو هفته گذشته یورو با ثبات تر بوده است یا ین ژاپن، کدام شاخص مناسب تر است؟ (اقتصاد ۸۷)

- (۱) واریانس (۲) میانگین وزنی

- (۳) میانگین مجذور خطا (۴) ضریب پراکندگی (ضریب تغییرات)



## ضریب چولگی

۸۵. در 40 داده آماری مقدار انحراف معیار برابر 2.5 و  $\sum (x_i - \bar{x})^3$  برابر 60 می باشد. نوع چولگی آن کدام است؟

(مدیریت و حسابداری ۸۹)

(۲) چوله به راست - تفاوت زیاد با نرمال

(۱) چوله به راست - تقریباً نرمال

(۴) چوله به چپ - تفاوت زیاد با نرمال

(۳) چوله به چپ - تقریباً نرمال

۸۶. در یک جامعه آماری با ضریب چولگی معقول، مد و میانه به ترتیب 21 و 29 می باشد. میانگین این جامعه کدام است؟ (GIS۹۰)

(۴) 34

(۳) 33

(۲) 32

(۱) 31

۸۷. در توزیع فراوانی هایی که دارای کشیدگی راست می باشند، کدام حالت برقرار است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۰)

(۱) میانگین از میانه بزرگ تر است.

(۲) میانه از میانگین بزرگ تر است.

(۳) میانه و میانگین تقریباً بر روی هم قرار می گیرند.

(۴) محل قرار گرفتن میانه و میانگین به کشیدگی منحنی ارتباطی ندارد.

۸۸. در یک توزیع آماری، از تمام داده ها میانه را کم کرده ایم و در داده حاصل مقدار میانگین 0.8 و واریانس 25 محاسبه شده است.

ضریب چولگی پیرسون این توزیع آماری کدام است؟ (GIS۹۱)

(۴) 0.24

(۳) 0.32

(۲) 0.48

(۱) 0.16

۸۹. در یک توزیع آماری، مقدار ضریب چولگی برابر -0.12 محاسبه شده است. این جامعه از نظر چولگی و مقایسه با توزیع نرمال چگونه است؟ (GIS۹۱)

(۱) چوله به راست - تفاوت اندک

(۲) چوله به چپ - تقریباً نرمال

(۳) چوله به راست - تقریباً نرمال

(۴) چوله به چپ - تفاوت اندک

۹۰. در 80 مشاهده آماری مجموع تمام داده ها 960 و مجموع مجذورات این داده ها 13140 می باشد. اگر مد این جامعه 14 باشد

ضریب چولگی پیرسون کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۱)

(۴) -0.44

(۳) -0.36

(۲) -0.33

(۱) -0.24

۹۱. در جدول توزیع فراوانی زیر، ضریب چولگی چارکی کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۲)

x	< 7	7-11	11-15	15-19	19-23	≥ 23
f	5	10	12	15	12	7

(۲) 0.066

(۱) -0.152

(۴) 0.245

(۳) -0.022

۹۲. در 100 داده آماری با میانگین 12 داریم  $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 12)^2 = 625$  و  $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 12)^3 = 250$  ضریب چولگی کدام است؟ (GIS۹۲)

(۴) 0.18

(۳) 0.16

(۲) 0.12

(۱) 0.04

۹۳. در 50 داده آماری با میانگین 17 داریم:  $\sum_{i=1}^{50} (x_i - 17)^2 = 450$  و  $\sum_{i=1}^{50} (x_i - 17)^3 = -108$  تفاوت جامعه از نظر قرینگی با توزیع نرمال چگونه است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۲)

(۲) چوله به چپ - تفاوت کمی با نرمال

(۱) چوله به چپ - تقریباً نرمال

(۴) چوله به راست - تفاوت کمی با نرمال

(۳) چوله به راست - تقریباً نرمال

۹۴. در داده های آماری  $x_i: i=1, 2, \dots, 120$  داریم  $\sum f_i (x_i - 11) = 0$  و  $\sum f_i (x_i - 11)^2 = 480$  و میانه داده ها 10.86، ضریب چولگی پیرسون کدام است؟ (GIS۹۳)

(۴) 0.07

(۳) 0.21

(۲) -0.21

(۱) -0.07

۹۵. در 100 داده آماری مجموع تمام داده ها 1200 و مجموع مربعات این داده ها 15300 و میانه آن ها 12.2 می باشد، ضریب چولگی پیرسون کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۹۳)

(۴) 0.2

(۳) 0.6

(۲) -0.2

(۱) -0.6

## ضریب کشیدگی

۹۶. در 25 داده آماری،  $\sum (x_i - \bar{x})^4 = 6075$  و انحراف معیار جامعه برابر 3 می‌باشد. ضریب کشیدگی کدام است؟ (GIS۸۹)

(۱) صفر (۲) 0.263 (۳) 1 (۴) 3

۹۷. در 50 داده آماری با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار 3، مقدار  $\sum (x - \mu)^4 = 12231$  می‌باشد. ضریب کشیدگی کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۰)

(۱) 0.03 (۲) 0.02 (۳) 0.04 (۴) 0.05

۹۸. در یک توزیع آماری با میانگین 12 داریم  $\sum f_i (x_i - 12)^2 = 96$  و  $\sum f_i (x_i - 12)^4 = 1248$ . اگر تعداد مشاهدات 24 باشد ضریب کشیدگی این توزیع کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۱)

(۱) 0.5 (۲) 0.75 (۳) -0.5 (۴) 0.25

۹۹. در یک توزیع نرمال، گشتاور مرتبه اول حول عدد 2 برابر 16 و گشتاور مرتبه چهارم حول عدد 18 مساوی 243 است. میانگین و انحراف معیار این توزیع کدامند؟ (اقتصاد ۹۱)

(۱)  $E(x) = 16$  ،  $\sigma = 3$  (۲)  $E(x) = 18$  ،  $\sigma = 3$   
 (۳)  $E(x) = 16$  ،  $\sigma = 4$  (۴)  $E(x) = 18$  ،  $\sigma = 6$

۱۰۰. در 60 داده آماری طبقه‌بندی شده داریم  $\sum f_i (x_i - 12) = 0$  ،  $\sum f_i (x_i - 12)^2 = 240$  و  $\sum f_i (x_i - 12)^4 = 2760$ ، ضریب کشیدگی گشتاوری آن کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۹۳)

(۱) 0.25 (۲) -0.125 (۳) 0.125 (۴) -0.25

۱. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - مقیاس)

در مقیاس‌های کمی فاصله‌ای و نسبی به ترتیب از صفر قراردادی و مطلق استفاده می‌شود در مقیاس‌های کیفی اسمی و رتبه‌ای به دلیل ضعف در اندازه‌گیری به هیچ‌وجه وجود ندارد.

۲. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - آمار توصیفی)

گزینه ۱ نادرست است زیرا اولین مرحله «هدف‌گذاری» بوده و مراحل تحقیقات علمی به ترتیب عبارتست از: هدف‌گذاری، جمع‌آوری داده‌ها، تجزیه و تحلیل داده‌ها و بیان یافته‌ها

گزینه ۲ نادرست است، زیرا موضوع آمار توصیفی تحلیل و توصیف جامعه است.

گزینه ۳ نادرست است، زیرا شاخص آماره با نمونه‌گیری و شاخص پارامتر با سرشماری حاصل می‌شود.

✓ گزینه ۴ درست است زیرا دقت پارامتر که از سرشماری به دست می‌آید بیش‌تر از آماره است که از طریق نمونه‌گیری به دست می‌آید.

۳. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - آمار توصیفی)

بہتر است ابتدا با توجه به داده‌های مسئله جدول توزیع فراوانی را کامل کنیم. می‌دانیم که فراوانی تجمعی طبقه آخر برابر  $N =$  تعداد داده‌ها است. بنابراین با داشتن فراوانی نسبی دسته وسط می‌توانیم فراوانی مطلق دسته وسط را به دست آوریم.

دسته	(1)	(2)	وسط (3)	(4)	(5)
$F_{c_i}$	8	25	$a = 37$	58	$75 = N$
$F_i$			12	21	

$$\begin{cases} f_i = \frac{F_i}{N} \rightarrow f_3 = \frac{F_3}{N} \rightarrow 0.16 = \frac{F_3}{75} \rightarrow F_3 = 12 \\ F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-1}} \rightarrow F_{c_i} = F_i + F_{c_{i-1}} \rightarrow F_{c_3} = F_3 + F_{c_2} = 12 + 25 = 37 \\ F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-1}} \rightarrow F_4 = F_{c_4} - F_{c_3} \rightarrow F_4 = 58 - 37 = 21 \\ N = F_c = 75 \end{cases}$$

۴. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - آمار توصیفی)

ابتدا باید فاصله طبقات را به دست آوریم و سپس حدود طبقات را مشخص کنیم. دقت کنید در بین 7 طبقه، «طبقه چهارم» طبقه وسط خواهد بود.

$$\begin{cases} I = \frac{R}{k} = \frac{x(n) - x(1)}{k} = \frac{44 - 23}{7} = \frac{21}{7} = 3 \\ \text{دامنه تغییرات: } R \text{ و تعداد طبقات: } K \text{ و فاصله طبقات: } I \end{cases}$$

حدود دسته‌ها	23-26	26-29	29-32	طبقه وسط 32-35	...

۵. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - آمار توصیفی)

منظور از فراوانی کل مجموع فراوانی‌ها است که با تعداد داده‌ها ( $N$ ) برابر است. بہتر است ابتدا جدول توزیع فراوانی را با داده‌های مسئله رسم کنیم و سپس با توجه به روابط فراوانی‌ها مقدار خواسته شده را به دست آوریم.

دسته	...	چهارم	پنجم	...
$F_c$		12	16	
$F$			$16 - 12 = 4$	$\sum F_i = N = 50$

$$\begin{cases} f_i = \frac{F_i}{N} \rightarrow f_5 = \frac{F_5}{N} = \frac{4}{50} = 0.08 = \%8 \\ F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-1}} \rightarrow F_5 = F_{c_5} - F_{c_4} = 16 - 12 = 4 \end{cases}$$

۶. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - مد (نما))

مُد (نما) متغیری است که بیشترین فراوانی را دارد در این سوال کلمه "هرگز" به عنوان نما (مُد) انتخاب می‌شود چرا که بیشترین فراوانی (750) را دارد البته طراح سوال اشتبهاً به جای کلمه "هرگز" از فراوانی آن (750) در گزینه ۴ استفاده کرده است.

۷. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - مُد)

از آنجایی که طبقه (27-23) بیشترین فراوانی را دارد بنابراین طبقه مُددار است و خواهیم داشت:

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I = 23 + \frac{(25-18)}{(25-18)+(25-12)} \times 4 = 24.4 \checkmark$$

۸. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - میانه و مد)

C-L	14-17	17-20	20-23	23-26	26-29	
$F_i$	10	17	25	18	10	N = 80
$F_{C_i}$	10	27	52	70	80	

محاسبه مُد:

طبقه (23-20) بیشترین فراوانی را داشته و طبقه مُددار است بنابراین مُد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I = 20 + \frac{(25-17)}{(25-17)+(25-18)} \times 3 = 21.60$$

محاسبه میانه:

الف) ابتدا  $F_{C_i}$  (تجمعی) را تشکیل می‌دهیم.  
 ب) اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{N}{2} = 40$  باشد طبقه میانه‌دار است. (23-20)

$$Md = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 20 + \frac{40-27}{25} \times 3 = 21.56$$

در نهایت اختلاف میانه از مد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{اختلاف میانه از مد} = 21.60 - 21.56 = 0.04 \checkmark$$

۹. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - میانه و مد)

برای محاسبه فزونی میانه از مد باید تفاضل مقدار میانه از مقدار مد را محاسبه کنیم:

$$Md - Mo = ? = \text{فزونی میانه از مد}$$

محاسبه میانه (Md):

C-L	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	
$F_i$	8	12	20	8	12	N = 60
$F_{C_i}$	8	20	40	48	60	

الف) ابتدا فراوانی تجمعی ( $F_{C_i}$ ) را تشکیل دهید.

ب) اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{N}{2} = 30$  باشد، طبقه میانه‌دار است (18-16).

$$Md = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 16 + \frac{30-20}{20} \times 2 = 17$$

محاسبه مد (Mo):

الف) طبقه‌ای که بیشترین فراوانی را در طبقه مددار است (18-16)

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I = 16 + \frac{8}{8+12} \times 2 = 16.8$$

ب) محاسبه مد از رابطه روبرو:

$$Md - Mo = 17 - 16.8 = 0.2 \checkmark$$

بنابراین در نهایت فزونی میانه از مد به صورت روبرو محاسبه می‌شود:

۱۰. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - خواص میانه)

طبق خاصیت سوم میانه: مجموع قدرمطلق انحرافات از میانه حداقل است.

۱۱. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - خواص میانه)

طبق خاصیت سوم میانه داریم: عدد دلخواه  $a$   $\sum |x_i - a| < \sum |x_i - Md|$

در این سؤال  $a = \mu$  است یعنی در حالت B، عدد 11 نشان‌دهنده میانگین است. اما در اصل قضیه هیچ تفاوتی ایجاد نمی‌کند چون به ازای هر  $a$  دلخواه این رابطه برقرار است:

$$\begin{cases} Md = 12 \\ \mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{550}{50} = 11 \end{cases} \rightarrow \sum |x_i - 12| < \sum |x_i - 11| \rightarrow A < B$$

۱۲. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - خواص میانه)

خاصیت (2) میانه: برخلاف میانگین، میانه از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.

**نکته:** چون میانه تابع ترتیب داده‌هاست، بنابراین تا زمانی که تغییرات روی داده‌ها (افزایش بزرگ‌ترین داده یا کاهش کوچک‌ترین داده) ترتیب داده‌ها را عوض نکند، روی میانه تأثیری ندارد.

یادآوری: مد، تابع فراوانی داده‌ها است.

۱۳. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - خواص میانه)

یادآوری:

(۱) خواص انحراف معیار: انحراف معیار داده‌های مساوی برابر صفر است.  $x_1 = x_2 = \dots = x_n \Leftrightarrow \sigma = 0$

(۲) خواص میانه: با تغییر در مبدأ و مقیاس داده‌ها، میانه تغییر خواهد کرد:  $Md(ax + b) = aMd + b$

(۳) خواص میانه: میانه در داده‌های مساوی برابر داده‌هاست.  $x_i = a, a, a, \dots, a \rightarrow Md = a$

با توجه به یادآوری (۱) چون انحراف معیار داده‌ها برابر صفر است بنابراین 5 داده با هم برابر می‌باشند و چون مقدار یکی 15 است بنابراین همه مشاهدات 15 هستند.

$$\sigma = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 15 \xrightarrow{(3)} Md_x = 15$$

$$(2) Md(2x + 1) = 2Md_x + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31$$

یادآوری: طبق خاصیت خطی بودن میانه، چنانچه تغییری در داده‌ها ایجاد شود، میانه نیز به همان اندازه تغییر خواهد کرد.

۱۴. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - خواص میانه)

یکی از خواص میانه این است که: میانه بر خلاف میانگین از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.

در این سؤال عدد 100 در بین داده‌ها یک عدد بزرگ نسبت به سایر داده‌ها است. به این دلیل میانه نماینده بهتری برای داده‌ها است.

۱۵. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - چندکها)

منظور از متغیر 80 درصدی همان صدک 80ام است؛ بنابراین:

الف)  $F_{c_i}$  را در جدول محاسبه می‌کنیم:

C-L	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30	
$F_i$	5	10	9	11	8	7	$N = \sum F_i = 50$
$F_{c_i}$	5	15	24	35	43	50	

ب) صدک در اولین طبقه‌ای است که  $F_{c_i} \geq \frac{aN}{100} = \frac{80 \times 50}{100} = 40$  باشد؛ بنابراین طبقه (24 - 27) طبقه صدک‌دار است.

ج) طبقه پیوسته است.

د) مقدار صدک هشتماد برابر است با:

$$P_a = L_i + \frac{\frac{aN}{100} - F_{c_{i-1}}}{F_i} \times I \xrightarrow{\substack{a=80 \\ N=50}} P_{80} = 24 + \frac{\frac{80 \times 50}{100} - 35}{8} \times 3 = 24 + \frac{5}{8} \times 3 = 25.875 \quad \checkmark$$

۱۶. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - چندکها)

از آنجاکه درصد داده‌های کمتر از 36.5 مورد نظر است؛ 36.5 یک چندک است (میان، چارک، دهک یا صدک) و چون صدک شامل تمام چندک‌هاست، 36.5 را صدک  $a$  فرض می‌کنیم. در واقع،  $a$  درصد مشاهدات کمتر یا مساوی 36.5 هستند. برای به دست آوردن مقدار  $a$ ، ابتدا  $F_{c_i}$  را در جدول محاسبه می‌کنیم:

C-L	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	
$F_i$	12	17	19	20	15	7	$N = \sum F_i = 90$
$F_{c_i}$	12	29	48	68	83	90	

با توجه به آنکه مقدار صدک برابر با 36.5 است، طبقه صدک‌دار طبقه (35-40) خواهد بود؛ بنابراین:

$$P_a = L_i + \frac{a N - F_{c_{i-1}}}{F_i} \times I \rightarrow 36.5 = 35 + \frac{a \times 90 - 48}{100 - 20} \times 5 \rightarrow 1.5 = \frac{0.9a - 48}{4} \rightarrow a = 60 \quad \checkmark$$

۱۷. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین هارمونیک)

$$\bar{X}_H = \frac{\sum w_i}{\sum \frac{w_i}{x_i}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}} = 96 \quad \checkmark$$

$$\text{باقیه مسافت} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

۱۸. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - میانگین هارمونیک)

اگر جدول فراوانی دستگاه‌های تراش را در نظر بگیریم:

مدت زمان : $x_i$	20	25	30	
تعداد : $w_i$	2	5	6	$\sum w_i = 13$

آنگاه میانگین هارمونیک مدت زمان لازم برای تراش به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\bar{X}_H = \frac{\sum w_i}{\sum \frac{w_i}{x_i}} = \frac{13}{\frac{2}{20} + \frac{5}{25} + \frac{6}{30}} = 26 \quad \checkmark$$

۱۹. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین هارمونیک)

$x_i$	8	9	16	18	
$w_i$	3	2	2	3	$\sum w_i = 10$

$$\bar{X}_H = \frac{\sum w_i}{\sum \frac{w_i}{x_i}} = \frac{10}{\frac{3}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \frac{3}{18}} = 11.25 \quad \checkmark$$

۲۰. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین هارمونیک)

این سؤال درباره محاسبه میانگین هارمونیک است.

$$\bar{X}_H = \frac{\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1}}{\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{2}{90} + \frac{1}{80}} \xrightarrow{\times 30} \frac{60}{\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{3}{8}} = \frac{60}{\frac{24 + 32 + 54}{144}} = 78.5 \quad \checkmark$$

۲۱. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - میانگین هارمونیک)

$$\bar{X}_H = \frac{w_1 + w_2 + \dots}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 96 \quad \checkmark$$

۲۲. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - میانگین هندسی)

$$x_1 = \frac{\text{سال اول}}{\text{سال قبل}} = 2$$

$$x_2 = \frac{\text{سال دوم}}{\text{سال اول}} = 3 \Rightarrow \bar{x}_G = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 4} = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3} \quad \checkmark$$

$$x_3 = \frac{\text{سال سوم}}{\text{سال دوم}} = 4$$

$$\bar{x}_G = \sqrt[5]{\frac{3}{2} \times \frac{27}{16} \times \frac{8}{3} \times \frac{2}{27} \times 2} = 1 \quad \checkmark$$

۲۳. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - میانگین هندسی)

۲۴. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین هندسی)

۲۵. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - میانگین هندسی)

با توجه به رابطه اول میانگین هندسی داریم:

$$\bar{x}_G = \sqrt[6]{a \times b \times 12 \times 9 \times 12.5 \times 6} = \frac{9}{2} \rightarrow \sqrt[6]{8100ab} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{\text{طرفین را به توان 6 می‌رسانیم}}{9^2 \times 10^2} \quad 8100ab = \frac{9^6}{2^6} \rightarrow ab = \frac{9^4}{2^6 \times 10^2}$$

$$\bar{x}_G = \sqrt[2]{a \times b} = \sqrt[2]{\frac{9^4}{2^6 \times 10^2}} = \frac{9^2}{2^3 \times 10} = \frac{81}{80}$$

۲۶. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین هندسی)

با توجه به رابطه سوم میانگین هندسی داریم:

سال 77 ... 73

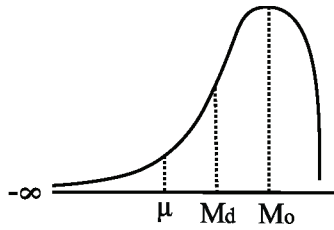
تومان 80 ... 5

$$\bar{x}_G = \sqrt[4]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{برابر} \quad (2-1) \times 100 = 100 \text{ درصد}$$

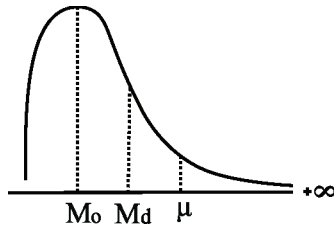


نکته:

- هرگاه میانگین هندسی کمتر از یک برابر باشد چولگی منفی است.



$\bar{X}_G < 1$  چوله به چپ



$\bar{X}_G > 1$  چوله به راست

- هرگاه میانگین هندسی بیشتر از یک برابر باشد چولگی مثبت است.

۲۷. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین هندسی)

با توجه به این که نرخ رشد تولیدات برحسب درصد داده شده است بنابراین رابطه دوم میانگین هندسی داریم:

$$\bar{X}_G = \sqrt[2]{(0.80+1)(-0.20+1)} = \sqrt[2]{1.44} = 1.2 \rightarrow (1.2-1) = 0.2 = 20\%$$

در واقع درصد هر سال را با جمع کردن با عدد یک به نسبت تبدیل کرده و سپس از رابطه اول میانگین هندسی استفاده می‌کنیم.

۲۸. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین پیراسته)

می‌دانیم در هر جامعه متقارن  $\mu = Md = Mo$  است که در آن  $\mu$  «میانگین حسابی» است. حال اگر به یک اندازه (مثلاً ۲۵٪) از ابتدا و انتهای مشاهدات حذف کنیم، باز هم جامعه متقارن و  $\mu = Md = Mo$  است. اما این بار  $\mu$  «میانگین پیراسته» است؛ پس در این سؤال از آنجا که میانگین پیراسته ۷۲ است، میانگین حسابی نیز ۷۲ خواهد بود.

۲۹. گزینه ۴ درست است.

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{2 \times 9 + 3 \times 12 + 2 \times 16}{7} = \frac{86}{7} = 12.28$$

$$\bar{X}_G = \sqrt[7]{X_1^{F_1} \times X_2^{F_2} \times \dots} = \sqrt[7]{9^2 \times 12^3 \times 16^2} = \sqrt[7]{(3^2)^2 \times (4 \times 3)^3 \times (4^2)^2}$$

$$= \sqrt[7]{3^4 \times 4^3 \times 3^3 \times 4^4} = \sqrt[7]{3^7 \times 4^7} = 12$$

$$\text{اختلاف میانگین‌ها} = \bar{X} - \bar{X}_G = 12.28 - 12 = 0.28 \quad \checkmark$$

این سؤال دقیقاً در آزمون سراسری سال ۸۶ رشته‌های حسابداری و مدیریت نیز مطرح شده بود.

۳۰. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - چندک و میانگین)

ابتدا با کمی دقت متوجه می‌شویم که طبقات اول و آخر محل دهک اول و دهم هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{دهک اول) } \\ \text{اولین طبقه که در آن } \frac{N}{10} = 4 \text{ باشد (طبقه 18-21)} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دهک دوم) } \\ \text{اولین طبقه که در آن } \frac{10N}{10} = 40 \text{ باشد (طبقه 33-36)} \end{array} \right\}$$

در ادامه چون دهک اول و دهک دهم هر کدام یکی از مشاهدات این طبقات هستند یک واحد از فراوانی آن‌ها کم می‌کنیم تا این شاخص‌ها را حذف کرده باشیم.

	D <sub>1</sub> ↓					D <sub>10</sub> ↓	
C-L	18-21	21-24	24-27	27-30	30-33	33-36	
F <sub>i</sub>	<del>4</del> 3	7	8	11	6	<del>4</del> 3	N = 40

حال می‌توانیم میانگین طبقات را محاسبه کنیم:

x'	-3	-2	-1	0	1	2
F <sub>i</sub>	3	7	8	11	6	3

$$\mu_{x'} = \frac{\sum F_i x'_i}{N} = \frac{3 \times -3 + 7 \times -2 + 8 \times -1 + 11 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 2}{38} = -\frac{1}{2}$$

از آنجا که می‌دانیم:

$$x' = \frac{x - \text{مرکز وسط با بیش‌ترین فراوانی}}{\text{فاصله طبقات}} = \frac{x - 28.5}{3}$$

$$\mu(x') = \mu\left(\frac{x - 28.5}{3}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow \mu_x = 28.5 - 3 \times \frac{1}{2} = 27 \checkmark$$

خواهیم داشت:

۳۱. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - میانگین پندارسته)

۳۲. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - میانگین حسابی)

x'_i = $\frac{x_i - 251}{16}$	-2	-1	0	1	2
x <sub>i</sub>	219	235	251	267	283
F <sub>i</sub>	30	25	24	27	14
	N = 120				

$$\mu(x') = \frac{\sum F_i x'_i}{N} = \frac{30 \times -2 + 25 \times -1 + 24 \times 0 + 27 \times 1 + 14 \times 2}{120} = \frac{-30}{120} = -\frac{1}{4}$$

$$\mu(x') = \mu\left(\frac{x - 251}{16}\right) = \frac{\mu(x) - 251}{16} = -\frac{1}{4} \rightarrow \mu(x) = 16 \times -\frac{1}{4} + 251 = 247 \checkmark$$

۳۳. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - چندک‌ها و میانگین)

	Q <sub>1</sub> ↓		Q <sub>3</sub> ↓			
X	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	33-37
F <sub>i</sub>	9	11	15	18	<del>14</del> 7	13
F <sub>Ci</sub>	9	20	35	53	67	80

محل چارک اول: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{1N}{4} = 20$  باشد (طبقه 17-21)

بنابراین از پایین تا داده 20ام، طبقات را حذف می‌کنیم.

محل چارک سوم: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = 60$  باشد (طبقه 29-33)

بنابراین از داده 60ام تا داده آخر، طبقات را حذف می‌کنیم.

$\frac{x-27}{4} = x'$	<del>21-25</del>	<del>25-29</del>	<del>29-33</del>
F <sub>i</sub>	15	18	7
	N = 40		

$$\mu(x') = \frac{\sum F_i x'_i}{N} = \frac{-1 \times 15 + 0 \times 18 + 1 \times 7}{40} = \frac{-8}{40} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

$$\mu(x') = \mu\left(\frac{x-27}{4}\right) = -0.2 \rightarrow \mu_x = 27 + 4 \times -0.2 = 26.2 \checkmark$$

۳۴. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - میانگین و میانه)

اگر داده‌ها را در نظر بگیریم:

~~71, 71, 72, 74, 77, 79, 80, 80, 83, 85, 86, 87, 92, 94, 95, 95, 97, 98~~

اگر از ابتدا و انتهای داده‌ها  $3 = \left| \frac{25}{100} \times 18 - 1 \right|$  داده را حذف می‌کنیم میانگین پیراسته برای بقیه داده‌ها برابر است با:

$$\mu = 84.3$$

$$Md = 84$$

$$\mu - Md = 0.3 \checkmark$$

و میانه برابر است با:

بنابراین تفاضل میانه از میانگین

۳۵. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین)

دقت کنید

$$x = 4u + 51 \rightarrow u = \frac{x-51}{4} = \frac{\text{مرکز وسط} - \text{عرض}}{4}$$

منظور از  $u$  در این جا همان جدول استاندارد شده است:

$u_i$	-2	-1	0	1	2	
$F_i$	9	12	17	10	16	$N = 64$

$$\mu_u = \frac{\sum F_i u_i}{N} = \frac{9 \times -2 + 12 \times -1 + 17 \times 0 + 10 \times 1 + 16 \times 2}{64} = 0.1875 \checkmark$$

۳۶. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - میانگین)

ابتدا با استفاده از فراوانی تجمعی طبقات، فراوانی نسبی آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$f_i = f_{c_i} - f_{c_{i-1}}$$

سپس با انتخاب مرکز وسط به عنوان مبدأ، داده‌ها را کوچک می‌کنیم تا بعد از محاسبه میانگین داده‌های کوچک شده ( $x'$ ) بتوانیم میانگین داده‌های اصلی ( $x$ ) را محاسبه کنیم.

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{\text{مرکز وسط} - x}{\text{عرض طبقات}} = \frac{x-46}{6} \\ \text{مرکز وسط} &= \frac{43+49}{2} = 46 \end{aligned} \right.$$

$x' = \frac{x-46}{6}$	-2	-1	0	1	2
C-L	31-37	37-43	43-49	49-55	55-61
$f_{c_i}$	0.2	0.35	0.65	0.85	1
$f_i$	0.2	0.15	0.3	0.2	0.15

$$\mu_{x'} = \sum f_i x'_i = \overbrace{0.2 \times -2}^{-0.4} + \overbrace{0.15 \times -1}^{-0.15} + \overbrace{0.3 \times 0}^0 + \overbrace{0.2 \times 1}^{0.2} + \overbrace{0.15 \times 2}^{0.3} = -0.05$$

$$\mu_{x'} = \mu\left(\frac{x-46}{6}\right) = \frac{\mu_x - 46}{6} = -0.05 \rightarrow \mu_x = 45.7 \checkmark$$

۳۷. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - میانگین)

$$\begin{cases} \sum F_i = N \rightarrow 3 + a + 10 + b + 3 = 28 \rightarrow a + b = 12 \\ \mu = \frac{\sum F_i x_i}{N} \rightarrow \frac{3 \times 0 + a \times 1 + 10 \times 2 + b \times 3 + 3 \times 4}{28} = 2 \rightarrow a + 3b = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a + 3b = 24 \end{cases} \rightarrow b = a = 6$$

۳۸. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - میانگین)

با توجه به دو نکته:

۱- هزینه متوسط در جدول فراوانی به ترتیب صعودی است.

۲- تعداد کل خانوارها برابر  $N = 100$  است.

چون میانگین ۲۰٪ از پرخرجترین خانوارها خواسته شده از انتهای جدول که هزینه متوسط بیشتر است به میزان مجموع ۲۰ خانوار جدا می‌کنیم و سپس میانگین جدول جدا شده را حساب می‌کنیم.

هزینه متوسط	15	35	60	85	210	380	
تعداد خانوار	32	48	12	5	2	1	$N = 100$

20 خانوار

هزینه متوسط	60	85	210	380	
تعداد خانوار	12	5	2	1	$N = 20$

$$\mu = \frac{\sum F_i x_i}{N} = \frac{12 \times 60 + 5 \times 85 + 2 \times 210 + 1 \times 380}{20} = \frac{1945}{20} = 97.25$$

۳۹. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - خواص میانگین)

$$\begin{cases} \mu(2x - 3) = 29 \rightarrow 2\mu_x - 3 = 29 \rightarrow \mu_x = 16 \\ \mu_x = \frac{\sum x_i}{N} \rightarrow 16 = \frac{\sum x_i}{20} \rightarrow \sum x_i = 320 \end{cases}$$

۴۰. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - خواص میانگین)

طبق خاصیت دوم میانگین حسابی: مجموع مجذور انحرافات (تفاضل‌ها) از میانگین همیشه می‌نیمم (حداقل) است.

$$\sum (x_i - \mu)^2 < \sum (x_i - a)^2 \quad (\text{به ازای هر } a \text{ دلخواه})$$

۴۱. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - رابطه میانگین‌ها)

بدون نیاز به محاسبه میانگین‌ها همواره رابطه زیر بین آنها برقرار است:

حسابی < هندسی < هارمونیک

۴۲. گزینه ۱ صحیح است. (فصل اول - دامنه تغییرات)

$$R = \overset{\text{هر داده} +2}{\rightarrow} (x_{(n)} + 2) - (x_{(1)} + 2) = x_{(n)} - x_{(1)}$$

توجه کنید که چون به داده اول و آخر به یک میزان اضافه می‌شود مقدار دامنه تغییرات ثابت خواهد ماند.

۴۳. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - انحراف چارک)

ابتدا باید  $Q_1$  (چارک اول) و  $Q_3$  (چارک سوم) را محاسبه کنیم:

C-L	<10	10-14	14-18	18-22	22-26	> 26	
$F_i$	6	12	15	14	8	5	N = 60
$F_{C_i}$	6	18	33	47	55	60	

الف)  $F_{C_i}$  را تشکیل دهید.

ب) اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{1N}{4} = 15$  باشد. (طبقه 10-14)  $Q_1$

$$Q_1 = 10 + \frac{15-6}{12} \times 4 = 13$$

الف)  $F_{C_i}$  را تشکیل دهید.

ب) اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = 45$  باشد. (طبقه 10-14)  $Q_3$

$$Q_3 = 18 + \frac{45-33}{14} \times 4 = 21.42$$

و در نهایت مقدار انحراف چارکی از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{21.42 - 13}{2} = \frac{8.42}{2} = 4.21 \checkmark$$

۴۴. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - انحراف چارکی)

داده  $N = 500 \rightarrow \begin{cases} Q_1 \text{ موقعیت} = \frac{N}{4} = 125 \text{ داده} \\ Q_3 \text{ موقعیت} = \frac{3N}{4} = 375 \text{ داده} \end{cases}$

$$\text{انحراف چارکی} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{41.6}{2} = 20.8 \rightarrow Q_3 = 67 \checkmark$$

۴۵. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - انحراف چارکی)

$$\text{انحراف چارکی} = \frac{\text{نیم دامنه}}{2} \rightarrow \text{SIQR} = \frac{IQR}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \checkmark$$

۴۶. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - انحراف چارکی)

داده  $N = 640 \rightarrow \begin{cases} Q_1 \text{ موقعیت} = \frac{N}{4} = 160 \text{ داده} \\ Q_3 \text{ موقعیت} = \frac{3N}{4} = 480 \text{ داده} \end{cases}$

$$\text{انحراف چارکی} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{35.4}{2} = 17.7 \rightarrow Q_3 = 43 \checkmark$$

۴۷. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - انحراف چارکی)

C-L	< 8	8-11	11-14	14-17	$\geq 17$	
$F_i$	11	15	20	27	11	N = 84
$F_{C_i}$	11	26	46	73	84	

چارک اول: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{1N}{4} = 21$  باشد (طبقه 8-11)

$$Q_1 = L_i + \frac{N - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 8 + \frac{21-11}{15} \times 3 = 10$$

چارک سوم: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = 63$  باشد (طبقه 17-14)

$$Q_3 = L_i + \frac{\frac{3N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 14 + \frac{63 - 46}{27} \times 3 = 15.88$$

$$\text{انحراف چارکی} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{15.88 - 10}{2} = 2.94 \checkmark$$

۴۸. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - انحراف چارکی)

C-L	<6	6-9	$\begin{matrix} Q_1 \\ \downarrow \\ 9-12 \end{matrix}$	12-15	$\begin{matrix} Q_3 \\ \downarrow \\ 15-18 \end{matrix}$	$\geq 18$	
$F_i$	5	7	10	15	12	3	N = 52
$F_{C_i}$	5	12	22	37	49	52	

ابتدا چارک اول و سوم را به دست می‌آوریم:

چارک اول  $F_{C_i}$  (الف)  
 چارک اول (ب) اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = 39$  باشد.

$$Q_1 = 9 + \frac{13 - 12}{10} \times 3 = 9.3$$

چارک سوم  $F_{C_i}$  (الف)  
 چارک سوم (ب) اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = 39$  باشد.

$$Q_3 = 15 + \frac{39 - 37}{12} \times 3 = 15.5$$

حال می‌توانیم انحراف چارکی را محاسبه کنیم:

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{15.5 - 9.3}{2} = 3.1 \checkmark$$

۴۹. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - انحراف چارکی)

ابتدا به جدول فراوانی  $(F_i)$ ، فراوانی تجمعی  $(F_{C_i})$  را اضافه می‌کنیم سپس به محاسبه چارک اول و سوم می‌پردازیم:

C-L	<12	12-14	14-16	16-18	$\geq 18$	
$F_i$	5	9	10	12	8	N = 44
$F_{C_i}$	5	14	24	36	44	

چارک اول: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{1N}{4} = 11$  باشد (طبقه 14-12)

$$Q_1 = L_i + \frac{\frac{1N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 12 + \frac{11 - 5}{9} \times 2 = 13.33$$

چارک سوم: (اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = 33$  باشد (طبقه 18-16)

$$Q_3 = L_i + \frac{\frac{3N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 16 + \frac{33 - 24}{12} \times 2 = 17.50$$

در نهایت می‌توانیم انحراف چارکی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\text{انحراف چارکی} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{17.50 - 13.33}{2} = 2.08 \checkmark$$

۵۰. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - نیمه واریانس)

واریانس سودهای نامطلوب (نیمه واریانس) برای شرکت عبارت است از واریانس سودهایی که از میانگین سود کم تر باشند. بنابراین ابتدا میانگین داده ها را محاسبه می کنیم:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{0+9+5+8+12+7+4+5+6+2+4+10}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

سپس داده های نامطلوب ( $x_i < \mu$ ) را مشخص می کنیم:

در انتها واریانس داده های نامطلوب را محاسبه می کنیم:

$$S.V = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k} = \frac{(0-6)^2 + (2-6)^2 + (4-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (5-6)^2}{6} = \frac{36+16+4+4+1+1}{6} = \frac{62}{6} = 10.33 \quad \checkmark$$

۵۱. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - نیمه واریانس)

$$\left\{ \begin{array}{l} S.V = \frac{\sum_{i=1}^K (x_i - \mu)^2}{K} = \frac{(12-16)^2 + (13-16)^2 + (14-16)^2 + (15-16)^2 + (15-16)^2}{5} = 6.2 \quad \checkmark \\ \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{15+20+12+18+16+15+14+21+13}{9} = 16 \\ \mu \text{ کم تر از: } 12, 13, 14, 15, 15 \end{array} \right.$$

۵۲. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - واریانس جامعه نمونه)

اگر از تمام داده ها عدد 6751231 را کم کنیم به اعداد 4, 3, -3, 0 می رسیم که مقدار واریانس تغییری نمی کند، زیرا:

$$\sigma^2(x - 6751231) = \sigma_x^2$$

حال می توانیم واریانس اعداد 4, 3, -3, 0 را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جامعه} \\ \sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N} = \frac{(-3-1)^2 + (0-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \quad \checkmark \\ \mu = \frac{\sum x}{N} = \frac{-3+0+3+4}{4} = 1 \\ \text{نمونه} \\ s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(-3-1)^2 + (0-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2}{3} = \frac{30}{3} = 10 \\ \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{-3+0+3+4}{4} = 1 \end{array} \right.$$

با توجه به آنکه واریانس نمونه 10 و واریانس جامعه 7.5 می شود ظاهراً منظور طراح سوال واریانس جامعه بوده است! (البته با توجه به گزینه های داده شده و پاسخنامه سنجش!)

۵۳. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - میانگین و واریانس)

اگر مقادیر R و 2R را به ترتیب شعاع و قطر دایره در نظر بگیریم از آن جا که میانگین قطر دایره ها 10 و انحراف 2.5 است داریم:

$$E(2R) = 10 \rightarrow 2E(R) = 10 \rightarrow E(R) = 5$$

$$\sigma(R) = 2.5 \rightarrow \underbrace{\sigma^2(R)}_{6.25} = E(R^2) - \underbrace{E(R)^2}_{25} \rightarrow E(R^2) = 31.25$$

حال می توانیم محاسبه کنیم که میانگین مساحت دایره ها چند برابر عدد  $\pi$  است:

$$\frac{E(\text{مساحت دایره})}{\pi} = \frac{E(\pi R^2)}{\pi} = \frac{\pi E(R^2)}{\pi} = E(R^2) = 31.25 \quad \checkmark$$



۵۴. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - واریانس)

$$\begin{cases} \sigma^2(-2x + \beta) = 4\sigma_x^2 = 4 \times 1.25 = 5\checkmark \\ \sigma_x^2 = E(x^2) - E(x)^2 = 7.5 - (2.5)^2 = 7.5 - 6.25 = 1.25 \end{cases}$$

۵۵. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - واریانس)

اگر رابطه مربوط به محاسبه واریانس را در نظر بگیریم:

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2 \rightarrow \sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2 \rightarrow \sum (x - \bar{x})^2 - \sum x^2 + n\bar{x}^2 = 0\checkmark$$

۵۶. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - واریانس)

۵۷. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - واریانس)

در نمودار جعبه‌ای داده‌ها از چارک اول تا سوم مورد نظر هستند:

$$\begin{cases} \text{محل چارک اول: } \frac{1N}{4} + \frac{1}{4} = 5 \text{ ام} \rightarrow Q_1 = 46 \\ \text{محل چارک دوم: } \frac{3N}{4} + \frac{3}{4} = 5 \text{ ام} \rightarrow Q_3 = 61 \end{cases}$$

Q<sub>1</sub>-----جعبه داده‌ها-----Q<sub>3</sub>

$$x_i: 41, 41, 42, 44, \textcircled{46}, 48, 50, 52, 52, 53, 55, 56, 60, 60, \textcircled{61}, 64, 65, 67, 69$$

حال برای محاسبه واریانس داده‌های داخل جعبه کافی است ابتدا برای سادگی در محاسبات آن‌ها را از عدد وسط (53) کم کنیم سپس واریانس آن‌ها را محاسبه کنیم.

$$x' = x - 53: -5, -3, -1, -1, 0, 2, 3, 7, 7$$

$$\begin{cases} \sigma^2(x') = \frac{\sum (x' - \mu_{x'})^3}{N} = \frac{\sqrt{36} + \sqrt{16} + \sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{36} + \sqrt{36}}{9} = 15.3\checkmark \\ \mu_{x'} = \frac{\sum x'_i}{N} = 1 \end{cases}$$

۵۸. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - واریانس)

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x-5}{3}\right) = \mu\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right) = \mu\left(\frac{x}{3}\right) - \mu\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}\mu_x - \frac{5}{3} \xrightarrow{\mu_x=5} \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0 \\ \sigma^2\left(\frac{x-5}{3}\right) = \sigma^2\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right) = \sigma^2\left(\frac{x}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sigma_x^2 \xrightarrow{\sigma_x^2=9} \frac{1}{9} \times 9 = 1 \end{cases}$$

**نکته:** همیشه میانگین و واریانس  $\frac{x-\mu}{\sigma}$  برابر صفر و یک است. در این سؤال نیز  $\frac{x-5}{3} = \frac{x-\mu}{\sigma}$  بنابراین میانگین و واریانس آن برابر صفر و یک خواهد شد.

۵۹. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - واریانس)

**راه حل تستی:** از آنجا که قد افراد در سال بعد بلندتر شده و با توجه به خاصیت اول میانگین  $\mu_{(x+a)} = \mu_x + a$  است، پس میانگین افراد در سال بعد، قطعاً از 120 بیشتر خواهد بود که تنها در گزینه ۴ این اتفاق مشاهده می شود.  
**راه حل تشریحی:**

هر فرد 14% قدش بلند شود.  $x + 0.14x = 1.14x$

$$\begin{cases} \mu(1.14x) = 1.14\mu_x = 1.14 \times 120 = 136.8 \\ \sigma^2(1.14x) = (1.14)^2 \sigma_x^2 = 1.2996 \times 100 = 129.96 \\ \mu = 120, \sigma^2 = 100 \end{cases}$$

۶۰. گزینه ۳ درست است (فصل اول - واریانس).

$$x + 0.2\mu = x + 0.2 \times 15 = x + 3$$

۲۰٪ میانگین به حقوق هر شخص اضافه شود:

$$\begin{cases} \mu(x+3) = \mu_x + 3 = 15 + 3 = 18 \\ \sigma(x+3) = \sigma_x = 3 \\ \mu = 15, \sigma = 3 \end{cases}$$

$$x + 0.2x = 1.2x$$

اگر در صورت سؤال گفته می‌شد ۲۰٪ به حقوق کارمندان اضافه می‌شود:

$$\begin{cases} \mu(1.2x) = 1.2 \times 15 = 18 \\ \sigma(1.2x) = |1.2| \times 3 = 3.6 \end{cases}$$

در این صورت گزینه ۴ صحیح می‌بود.

۶۱. گزینه ۴ صحیح است. (فصل اول - تصحیح شپارد)

با توجه به اینکه شرایط تصحیح شپارد برقرار است یعنی

۱- داده‌ها طبقه‌بندی شده پیوسته

۲- توزیع فراوانی اندکی متقارن

۳-  $N > 1000$  بنابراین واریانس تصحیح شده شپارد عبارت است از:

$$\begin{cases} \sigma^2_{\text{شپارد}} = \sigma^2 - \frac{I^2}{12} = 12 - \frac{6^2}{12} = 12 - 3 = 9 \\ I = 6, \sigma^2 = 12 \end{cases}$$

۶۲. گزینه ۳ صحیح است. (فصل اول - تصحیح شپارد)

تصحیح شپارد برای واریانس متغیر پیوسته هنگامی که  $N > 1000$  و تابع توزیع فراوانی حدوداً متقارن باشد بکار می‌رود و به صورت روبه رو

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 - \frac{I^2}{12} \quad (I = \text{فاصله طبقات})$$

است:

۶۳. گزینه ۱ صحیح است. (فصل اول - تصحیح شپارد)

یادآوری: هرگاه: ۱- داده‌های آماری دسته‌بندی شده با متغیر پیوسته ۲-  $N \geq 1000$  ۳- تابع توزیع فراوانی متقارن یا اندکی متقارن باشد واریانس

محاسبه شده به روش معمول از واریانس واقعی جامعه بیشتر خواهد شد و در این شرایط از واریانس تصحیح شده شپارد استفاده خواهیم کرد.

$$\sigma^2_{\text{شپارد}} = \sigma^2 - \frac{I^2}{12}$$

۶۴. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - میانگین کل چند جامعه)

میانگین کل جوامع از رابطه زیر به دست می‌آید که در آن  $n_i$  تعداد مشاهدات و  $\mu_i$  میانگین هر جامعه است:

$$\mu = \frac{\sum n_i \mu_i}{\sum n_i} = \frac{20 \times 100 + 30 \times 300}{20 + 30} = 220 \quad \checkmark$$

۶۵. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - واریانس کل چند جامعه)

$$\mu = \frac{\sum N_i \mu_i}{\sum N_i} = \frac{100 \times 14 + 200 \times 18 + 700 \times 20}{100 + 200 + 700} = \frac{19000}{1000} = 19$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum N_i \sigma_i^2 + \sum N_i (\mu_i - \mu)^2}{\sum N_i}$$

$$= \frac{100 \times 50 + 200 \times 60 + 700 \times 40 + \frac{2500}{1000} (14-19)^2 + \frac{200}{1000} (18-19)^2 + \frac{700}{1000} (20-19)^2}{1000}$$

$$= \frac{48400}{1000} = 48.4$$

۶۶. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - واریانس کل چند جامعه)

$$\sigma_{\text{کل}}^2 = \frac{\sum N_i \sigma_i^2}{\sum N_i} + \underbrace{\frac{\sum N_i (\mu_i - \mu_{\text{کل}})^2}{\sum N_i}}_{\text{مقداری بزرگتر از صفر}} = \frac{10 \times 16 + 20 \times 25 + 45 \times 20}{10 + 20 + 45} + k = \frac{1560}{75} + k = 20.8 + k$$

دقت کنید که وقتی میانگین‌های جوامع متفاوت هستند بنابراین میانگین کل نیز با آن‌ها متفاوت خواهد بود و کسر دوم در محاسبه واریانس کل صفر نخواهد شد و حتماً مقداری بزرگتر از صفر خواهد بود بنابراین در بین گزینه‌های این سؤال گزینه‌ای می‌تواند واریانس کل باشد که از 20.8 بزرگتر باشد و تنها گزینه ۴ است که بزرگتر است (22.1 > 20.8) و جواب سؤال است.

۶۷. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - واریانس کل چند جامعه)

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{کل}}^2 &= \frac{\sum N_i \sigma_i^2}{\sum N_i} + \frac{\sum N_i (\mu_i - \mu_{\text{کل}})^2}{\sum N_i} = \frac{25 \times 2.04 + 30 \times 3.1 + 45 \times 4}{25 + 30 + 45} = 3.24 \rightarrow \sigma_{\text{کل}} = 1.8 \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_{\text{کل}} &\rightarrow (\mu_i - \mu_{\text{کل}})^2 = 0 \\ N_1 = 25, N_2 = 30, N_3 = 45, \sigma_1^2 = 2.04, \sigma_2^2 = 3.1, \sigma_3^2 = 4 \end{aligned} \right.$$

دقت کنید که وقتی میانگین جوامع با هم یکسان هستند، واریانس کل عبارت است از:

$$\sigma_{\text{کل}}^2 = \frac{\sum N_i \sigma_i^2}{\sum N_i}$$

۶۸. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - قضیه چی بی شف)

در این سوال داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} P(\mu - k\sigma \leq \mu \leq \mu + k\sigma) &\geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{16}{25} \times 100 \rightarrow 64 \checkmark \\ \frac{b-a}{2} = k\sigma &\rightarrow \frac{77-67}{2} = k \times 3 \rightarrow k = \frac{5}{3} \end{aligned} \right.$$

۶۹. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - قضیه چی بی شف)

با توجه به قضیه چی بی شف داریم:

$$P\left(\underbrace{\mu - k\sigma}_{a=62} < x < \underbrace{\mu + k\sigma}_{b=72}\right) \rightarrow \geq 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{36}{100}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{36}{100} \rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{64}{100} \rightarrow k = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{b-a}{2} = k \times \sigma \rightarrow \frac{72-62}{2} = \frac{5}{4} \times \sigma \rightarrow \left\{ \sigma = 4, \sigma^2 = 16 \checkmark \right.$$

۷۰. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - قضیه چی بی شف)

شرایط استفاده از قضیه چی بی شف برقرار است: (جامعه نامعلوم با میانگین و واریانس)

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(\frac{a=130}{\mu - k\sigma} \leq x \leq \frac{b=290}{\mu + k\sigma}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \checkmark \\ \frac{b-a}{2} = k\sigma \rightarrow k = 2 \end{array} \right.$$

۷۱. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - قضیه چیبی شف)

همانطور که می دانیم بر طبق قانون چیبی شف، نامساوی زیر برقرار است:

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(\frac{a=47}{\mu - k\sigma} \leq x \leq \frac{b=65}{\mu + k\sigma}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{10}{8}\right)^2} = \frac{\times 100}{36} \checkmark \\ \frac{b-a}{2} = k\sigma \rightarrow \frac{65-47}{2} = k \times 7.2 \rightarrow k = \frac{10}{8} \end{array} \right.$$

۷۲. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - قضیه چیبی شف)

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(\frac{a=8}{\mu - k\sigma} \leq x \leq \frac{b=28}{\mu + k\sigma}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{21}{25} = 0.84 \checkmark \\ \frac{b-a}{2} = k\sigma \rightarrow \frac{28-8}{2} = k \times 4 \rightarrow k = \frac{5}{2} \\ \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2 = \frac{17000}{50} - \left(\frac{9000}{50}\right)^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4 \end{array} \right.$$

۷۳. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - قضیه چیبی شف)

$$P(|x - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|x - 5| \geq 6) \leq \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \checkmark$$

این سوال درباره قضیه چیبی شف به صورت روبرو است:

که در آن  $\mu = 5$  و  $\varepsilon = 6$  و  $\sigma^2 = 4$  است، بنابراین خواهیم داشت:

۷۴. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - قضیه چیبی شف)

بنابر قضیه چیبی شف داریم:

$$\left(\frac{\mu - k\sigma}{?}, \frac{\mu + k\sigma}{?}\right) \rightarrow \geq 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{36}{100}$$

بنابراین با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{36}{100} \rightarrow k = \frac{10}{8}, \mu = 71, \sigma = 4$$

و در نهایت:

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = \left(71 - \frac{10}{8} \times 4, 71 + \frac{10}{8} \times 4\right) = (66, 76) \checkmark$$

۷۵. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - قضیه چیبی شف)

بنابر قضیه چیبی شف در جوامع غیرنرمال حداقل  $1 - \frac{1}{K^2}$  درصد از مشاهدات در فاصله  $K$  انحراف معیار از میانگین قرار دارند به عبارت دیگر:

$$p(\mu - K\sigma < x < \mu + K\sigma) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$$

در این مسئله نیز به ازاء  $K = 3$  انحراف معیار داریم:

$$p(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} \times 100 \rightarrow 88.8\% \checkmark$$

۷۶. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

یادآوری:  $\mu$  (میانگین) تنها شاخص مرکزی است که دو خاصیت زیر را دارد:

$$\sum (x_i - \mu) = 0$$

$$\sum (x_i - \mu)^2: \min$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{75} (x_i - 15) = 0 \rightarrow \mu = 15$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{432}{75} = \frac{144}{25} \rightarrow \sigma = \frac{12}{5} = 2.4$$

حال از آنجا که ضریب تغییرات  $y_i$  برابر 0.2 است، داریم:

$$CV_{Y_i} = \frac{\sigma_{Y_i}}{\mu_{Y_i}} = \frac{\frac{\sigma_{\frac{1}{2}X_i+a}}{\frac{1}{2}\mu_X+a}}{\frac{\mu_{\frac{1}{2}X_i+a}}{\frac{1}{2}\mu_X+a}} = \frac{\frac{1}{2}\sigma_X}{\frac{1}{2}\mu_X+a} = \frac{\frac{1}{2}(2.4)}{\frac{1}{2}(15)+a} = 0.2 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times 2.4 = \frac{15}{2} \times 0.2 + 0.2a \rightarrow 1.2 = 1.5 + 0.2a \rightarrow 0.2a = -0.3 \rightarrow a = -1.5$$

۷۷. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

اگر مشاهدات به صورت  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 45$ ) باشند، مشاهدات جدید به صورت  $\frac{3}{2}x_i + 4.5$  هستند، بنابراین:

$$CV_{\left(\frac{3}{2}X+4.5\right)} = \frac{\sigma_{\left(\frac{3}{2}X+4.5\right)}}{\mu_{\left(\frac{3}{2}X+4.5\right)}} = \frac{\frac{3}{2}\sigma_X}{\frac{3}{2}\mu_X+4.5} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{12}{5}}{\frac{3}{2} \times \frac{9}{5} + 4.5} = \frac{3.6}{7.2} = 0.5 \quad \checkmark$$

$$\mu_X = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{81}{45} = \frac{9}{5}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2 = \frac{405}{45} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \rightarrow \sigma_X = \frac{12}{5}$$

۷۸. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1.6}{4.2} = \frac{16}{42} = 0.38 \quad \checkmark$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{168}{40} = \frac{42}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2 = \frac{808}{40} - \left(\frac{42}{10}\right)^2 = \frac{202}{10} - \left(\frac{42}{10}\right)^2 = 2.56 \rightarrow \sigma = \sqrt{2.56} = 1.6$$

۷۹. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

اگر  $x$  را طول هر مربع در نظر بگیریم، آنگاه مساحت مربع  $x^2$  خواهد بود. آن گاه با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\mu_X = E(x) = 12 \xrightarrow{CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = 0.25} \mu_{x^2} = E(x^2) = ?$$

برای حل مسئله فوق به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0.25}{\frac{\sigma_x}{\mu_x}} = \frac{\sigma_x}{12} \rightarrow \sigma_x = 12 \times \frac{25}{100} = 3 \rightarrow \sigma_x^2 = 9 \\ \sigma_x^2 = E(x^2) - \underbrace{E(x)^2}_{144} \rightarrow E(x^2) = 144 + 9 = 153 \checkmark \end{array} \right.$$

۸۰. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - ضریب پراکندگی)

هرچقدر ضریب تغییرات کم تر باشد توزیع فراوانی متعادل تر می شود اما لزوماً پراکندگی کم تر نیست، به مثال زیر دقت کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} cv_1 = \frac{\sigma_1}{\mu_1} = \frac{4}{10} = 0.4 \\ cv_2 = \frac{\sigma_2}{\mu_2} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{array} \right.$$

۸۱. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - ضریب پراکندگی)

$$\left\{ \begin{array}{l} CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{3}{8} = 0.375 \checkmark \\ \mu_x = \frac{\sum x}{N} = \frac{480}{60} = 8 \\ \sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \left( \frac{\sum x}{N} \right)^2 = \frac{4380}{60} - 8^2 = 73 - 64 = 9 \rightarrow \sigma = 3 \end{array} \right.$$

۸۲. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

$$\left\{ \begin{array}{l} CV_y = CV_{2x+3} = \frac{\sigma(2x+3)}{\mu(2x+3)} = \frac{2\sigma_x}{2\mu_x+3} = \frac{18}{75} = 0.24 \checkmark \\ CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \rightarrow 0.25 = \frac{\sigma_x}{36} \Rightarrow \sigma_x = 9 \end{array} \right.$$

۸۳. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

اگر متغیر X را طول ضلع مربع در نظر بگیریم آنگاه متغیر  $x^2$  مساحت مربع خواهد بود:

$$\left\{ \begin{array}{l} cv_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{3}{12} = 0.25 \checkmark \\ \mu_x = \frac{\sum x}{N} = 12 \\ \sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \left( \frac{\sum x}{N} \right)^2 = 153 - (12)^2 = 9 \rightarrow \sigma_x = 3 \end{array} \right.$$

۸۴. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - ضریب تغییرات)

یادآوری: موارد کاربرد ضریب تغییرات (CV): ضریب تغییرات برای مقایسه دو جامعه وقتی استفاده می شود که یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱- دو جامعه دارای واحد اندازه گیری متفاوت باشند. ۲- دو جامعه میانگین متفاوتی داشته باشند.

در این سؤال نیز واحد اندازه گیری جامعه اول «یورو» و واحد اندازه گیری جامعه دوم «ین» است بنابراین طبق شرط اول ضریب پراکندگی مناسب ترین شاخص برای مقایسه است.

۸۵. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - چولگی)

با توجه به داده‌های مسئله ابتدا مقدار چولگی را به کمک رابطه گشتاوری به دست می‌آوریم:

$$Sk = \frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N \sigma^3} = \frac{60}{(2.5)^3} = \frac{1.5}{15.625} = 0.096 \quad \checkmark$$

اولاً، از آنجا که  $Sk > 0$ ، توزیع چوله به راست است.  
ثانیاً، از آنجا که  $|Sk| \leq 0.1$ ، توزیع تقریباً نرمال است.

یادآوری:

- $|Sk| \leq 0.1 \rightarrow$  تقریباً نرمال
- $0.1 < |Sk| \leq 0.5 \rightarrow$  تفاوت اندک با نرمال
- $|Sk| > 0.5 \rightarrow$  تفاوت فاحش با نرمال

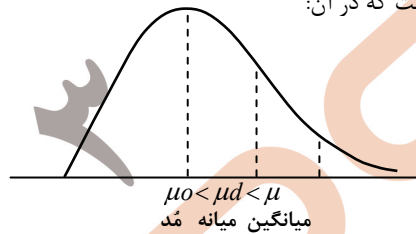
۸۶. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - ضریب چولگی پیرسون)

در شرایطی که چولگی جامعه در حد معقولی باشد، روابط پیرسون برای محاسبه ضریب چولگی با هم برابر شده و خواهیم داشت:

$$SK_1 = SK_2 \rightarrow \frac{\mu - Mo}{\sigma} = \frac{3(\mu - Md)}{\sigma} \rightarrow \mu = 33 \quad \checkmark$$

۸۷. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - چولگی)

منظور از اصطلاح «کشیدگی راست» همان «چوله به راست» است که در آن:



۸۸. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - چولگی)

ابتدا از آنجا که میانه به عنوان یک ثابت از تمام مشاهدات ( $x$ ) کم شده است داریم:

$$\begin{cases} \mu(x - Md) = \mu_x - Md = 0.8 \\ \sigma^2(x - Md) = \sigma_x^2 = 25 \rightarrow \sigma_x = 5 \end{cases}$$

حال برای محاسبه ضریب چولگی پیرسون می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$sk = \frac{3(\mu - Md)}{\sigma} = \frac{3 \times 0.8}{5} = 0.48 \quad \checkmark$$

یادآوری:

$$\begin{cases} \mu(x \pm a) = \mu_x \pm a \\ \sigma^2(x \pm a) = \sigma_x^2 \end{cases}$$

۸۹. گزینه ۴ درست است. (فصل اول - چولگی)

- $sk = -0.12 < 0 \rightarrow$  چوله به چپ
- $0.1 < |sk| = 0.12 \leq 0.5 \rightarrow$  تفاوت اندک با نرمال



$$\left\{ \begin{aligned} SK &= \frac{\mu - Mo}{\sigma} = \frac{12 - 14}{4.5} = -0.44 \checkmark \\ \mu &= \frac{\sum x}{N} = \frac{960}{80} = 12 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum x^2}{N} - \left( \frac{\sum x}{N} \right)^2 = \frac{13140}{80} - \left( \frac{960}{80} \right)^2 = 20.25 \rightarrow \sigma = 4.5 \end{aligned} \right.$$

۹۱. گزینه ؟ درست است. (فصل اول - ضریب چولگی)

(جواب صحیح در گزینه‌ها نیست)

ابتدا جدول فراوانی تجمعی زیر را در نظر می‌گیریم:

x	< 7	7-11	11-15	15-19	19-23	≥ 23	
F <sub>i</sub>	5	10	12	15	12	7	N = 61
F <sub>Ci</sub>	5	15	27	42	54	61	

حال برای محاسبه ضریب چولگی چارکی بایستی از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$SK_Q = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{20.25 - 2 \times 15.93 + 11.08}{20.25 - 11.08} = \frac{-0.53}{9.17} = -0.058$$

محاسبه Q<sub>1</sub>: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{1N}{4}$  باشد: (طبقه 11-15)

$$Q_1 = L_i + \frac{\frac{1N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 11 + \frac{\frac{61}{4} - 15}{12} \times 4 = 11 + \frac{1}{12} = 11.08$$

محاسبه Q<sub>2</sub>: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{2N}{4}$  باشد: (طبقه 15-19)

$$Q_2 = L_i + \frac{\frac{2N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 15 + \frac{\frac{61}{2} - 27}{15} \times 4 = 15 + \frac{14}{15} = 15.93$$

محاسبه Q<sub>3</sub>: اولین طبقه‌ای که در آن  $F_{C_i} \geq \frac{3N}{4}$  باشد: (طبقه 19-23)

$$Q_3 = L_i + \frac{\frac{3N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times I = 19 + \frac{\frac{3 \times 61}{4} - 42}{12} \times 4 = 19 + \frac{15}{12} = 20.25$$

با این حال سنجش گزینه‌ی ۳ را به عنوان گزینه‌ی صحیح انتخاب کرده است.

۹۲. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - چولگی)

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N \sigma^3} = \frac{250}{100} = \frac{2.5}{(2.5)^3} = \frac{1}{(2.5)^2} = 0.16 \checkmark \\ \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{625}{100} = 6.25 \rightarrow \sigma = 2.5 \end{aligned} \right.$$

۹۳. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - ضریب چولگی)

محاسبه ضریب چولگی گشتاوری ( $\alpha_3$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} s_k &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N \sigma^3} = \frac{-108}{27} = -0.08 \checkmark \\ \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{450}{50} = 9 \rightarrow \sigma = 3, \sigma^3 = 27 \end{aligned} \right.$$

تحلیل ضریب چولگی (انحراف از قرینگی):

$$\left\{ \begin{aligned} s_k &= -0.08 < 0 \quad \text{چوله به چپ} \\ |s_k| &= 0.08 \leq 0.1 \quad \text{تقریباً نرمال} \end{aligned} \right.$$

۹۴. گزینه ۳ درست است. (فصل اول - ضریب چولگی)

$$\left\{ \begin{aligned} SK &= \frac{3(\mu - Md)}{\sigma} = \frac{3(11 - 10.86)}{2} = 0.21 \checkmark \\ \sum F_i (x_i - \mu) &= 0 \rightarrow \mu = 11 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum F_i (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{480}{120} = 4 \rightarrow \sigma = 2 \\ Md &= 10.86 \end{aligned} \right.$$

۹۵. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - چولگی)

$$\left\{ \begin{aligned} SK &= \frac{3(\mu - Md)}{\sigma} = \frac{3(12 - 12.2)}{3} = -0.2 \checkmark \\ Md &= 12.2 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2 = \frac{15300}{100} - (12)^2 = 9 \rightarrow \sigma = 3 \end{aligned} \right.$$

۹۶. گزینه ۱ درست است. (فصل اول - ضریب کشیدگی)

$$\left\{ \begin{aligned} E &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{6075}{3^4} - 3 = \frac{243}{81} - 3 = 0 \checkmark \\ \sum (x_i - \bar{x})^4 &= 6075, \sigma = 3, N = 25 \end{aligned} \right.$$

۹۷. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - ضریب کشیدگی)

$$E = \frac{\sum (x - \mu)^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{12231}{50 \times 81} - 3 = \frac{151}{50} - 3 = \frac{1}{5} = \frac{2}{100} \checkmark$$

(فصل اول - ضریب کشیدگی)

۹۸. گزینه ۴ درست است.

$$\left\{ \begin{aligned} E &= \frac{M_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\sum F_i (x_i - \mu)^4}{N \sigma^4} - 3 = \frac{1248}{16} - 3 = 3.25 - 3 = 0.25 \checkmark \\ \sigma^2 &= \frac{\sum F_i (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{96}{24} = 4 \rightarrow \sigma^4 = 16 \end{aligned} \right.$$

۹۹. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - گشتاور و ضریب کشیدگی)

ابتدا از آن جا که گشتاور مرتبه اول حول عدد 2 برابر 16 است، مقدار میانگین بدست می آید:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 2)^1}{N} = 16 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^N 2}{N} = 16$$

$$\rightarrow \mu - \frac{2N}{N} = 16 \rightarrow \mu = 18 \checkmark$$

حال از آن جا که در توزیع نرمال مقدار پارامتر پراکنندگی نسبی «کشیدگی» ( $\alpha_4$ ) برابر عدد 3 است می توانیم مقدار انحراف معیار را نیز محاسبه کنیم:

$$\alpha_4 = \frac{\sum (x_i - \mu)^4}{\frac{N}{\sigma^4}} = 3 \rightarrow \frac{243}{\sigma^4} = 3 \rightarrow \sigma^4 = \frac{243}{3} = 81$$

$$\rightarrow \sigma = 3 \checkmark$$

۱۰۰. گزینه ۲ درست است. (فصل اول - کشیدگی)

$$E = \frac{\sum F_i (x_i - \mu)^4}{\frac{N}{\sigma^4}} - 3 = \frac{2760}{16} - 3 = -0.125 \checkmark$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{240}{60} = 4$$