خودآزمایی

تعریفی

1 ـ **کدام‌یک از این مقیاس‌ها دارای صفر قراردادی است؟**

1) نسبی 2) فاصله‌ای 3) اسمی 4) رتبه‌ای

2 ـ **یکی از موارد بررسی در استنباط آماری، کدام است؟**

1) برآورد پارامترها 2) محاسبه‌ی معیارهای عددی
3) جمع‌آوری اطلاعات 4) ارائه جداول و نمودارها

3 ـ **«هر خصوصیت عددی از توزیع جامعه» چه نامیده می‌شود؟**

1) آماره 2) پارامتر 3) آزمایش 4) فرض آماری

4 ـ **در «چه مرحله‌ای» از یک تحقیق علمی؛ معلوم می‌شود که: حدس یا نظریهٔ موجود، با داده‌ها در تناقض است یا نه؟**

1) فرضیه تحقیق 2) بیان یافته‌ها
3) تعیین زمینه و موضوع تحقیق 4) تجزیه و تحلیل داده‌ها

جدول فراوانی

5 ـ **اگر 80 – 89 و 90 – 99 دو طبقه از یک جدول طبقه‌بندی باشند،، اندازه طول طبقه کدام است؟**

1) مساوی با عرض طبقه 2) یک واحد کمتر از عرض طبقه
3) یک واحد بیشتر از عرض طبقه 4) مساوی با فاصلهٔ طبقات

6 ـ **اگر در جدول توزیع فراوانی‌ها، فراوانی مطلق طبقه سوم 12 و فراوانی نسبی همان طبقه 0.48 باشد، فراوانی تجمعی طبقه آخر کدام است؟**

1) 25 2) 50 3) 96 4) 100

معیارهای تمرکز

مد یا نما (Mo)

7 ـ **مد این جدول کدام است؟**

x_i	-2	-1	0	1	2	3
F_i	10	20	10	15	15	30

1) 0 2) 3 3) 2.5 4) 2

8ـ مد جدول زیر کدام است؟

C – L	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
F_i	0.10	0.20	0.30	0.40

1) 40 2) 39 3) 42 4) 45

میانه $(Md = me)$

9ـ میانه این جدول کدام است؟

C – L	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10
F_i	5	10	5	10

1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

10ـ میانه جدول زیر کدام است؟

x_i	– 2	– 1	0	1	2	3
F_i	10	20	10	15	15	30

1) $\frac{1}{2}$ 2) 0 3) 1 4) 1.5

11ـ میانهٔ توزیع آماری 40 مشاهده 32.5 است. اگر $I = 5$ و فراوانی طبقهٔ میانه‌دار 10 و مجموع فراوانی‌های ماقبل طبقهٔ میانه‌دار 14 باشد، حدود کرانهٔ طبقهٔ میانه‌دار کدام است؟

1) 34.5 – 29.5 2) 39 – 29 3) 40 – 30 4) 39 – 35

12ـ در مجموعه اعداد 40 , 80, 60 , 50 , 60 عدد 60 کدام پارامتر است؟

1) میانه 2) میانه و نما 3) میانگین 4) نما و میانگین

محاسبه چندک‌ها

13ـ چارک اول این داده‌ها کدام است؟

C – L	110 – 119	120 – 129	130 – 139
F_i	10	20	70

1) 129 2) 130 3) 127 4) 132.70

14 ـ در داده‌های زیر چارک اول کدام است؟

15 ـ 5 (1

16 ـ 9 (3

17 ـ

X_i:	10	5	7	11	14	15
F_i:	3	2	1	7	4	2

میانگین هارمونیک $\left(\bar{X}_H\right)$

18 ـ با بررسی پرسشنامه‌های طرح هزینه و درآمد خانوار شهری در چهار سال متوالی، معلوم شد قیمت نفت سفید یک خانوار به ترتیب 1.6 , 1.8 , 2.1 و 2.5 ریال در لیتر است. اگر خانواری برای هر سال 20 هزار ریال هزینه در نظر بگیرد، متوسط مصرف سوخت سالانه این خانوار برحسب ریال در لیتر چقدر است؟

1) 1.75　2) 2.5　3) 2.25　4) 1.94

19 ـ میانگین هارمونیک داده‌های آماری جدول زیر کدام است؟

x_i	3	4	6	9
F_i	2	4	3	1

1) 4.39　2) 4.47　3) 4.51　4) 4.90

میانگین هندسی $\left(\bar{X}_G\right)$

20 ـ قیمت سهام یک کارخانه از 100 ریال در سال 1380 به3200 ریال در سال 1385 افزایش یافته است. متوسط نرخ افزایش قیمت سهام در این دوره چقدر بوده است؟

1) %80　2) %120　3) %125　4) %100

21 ـ میانگین هندسی اعداد 25 ,30 ,24 , 45 کدام است؟

1) 30　2) 26　3) 32　4) 28

میانگین حسابی

22 ـ اگر میانگین داده‌های $x_1 , x_2 , \ldots , x_{10}$ برابر 5 باشد، میانگین16و $x_1 , x_2 , \ldots , x_{10}$ کدام است؟

1) 5　2) 6　3) 6.6　4) 10.5

23 ـ در جدول داده‌های روبرو مقدار میانگین کدام است؟

x_i	1	3	5	7	9
F_i	2	4	8	5	1

1) 4.7 2) 4.9 3) 5.1 4) 5.2

24 ـ میانگین داده‌ها با توزیع فراوانی تجمعی زیر به صورت $90+6\bar{u}$ محاسبه شده است. $\bar{u}$ کدام است؟

31 ـ نشان دسته	25 ـ 26 ـ 27 ـ 28 ـ 29 ـ 30 ـ 0 2 6 0 4 8 2
38 ـ فراوانی تجمعی	32 ـ 33 ـ 34 ـ 35 ـ 36 ـ 37 ـ 5 9 2 4

1) -0.1 2) -0.2 3) 0.1 4) 0.3

خواص میانگین حسابی $(\bar{X})$

39 ـ اگر میانگین $x_1, x_2, \dots, x_N$ برابر μ_x و میانگین $y_1, y_2, \dots, y_k$ مساوی μ_x باشد و داشته باشیم $\mu_y = a\,\mu_x$ در آن صورت مقدار $\dfrac{\sum x_i}{\sum y_i}$ کدام است؟

1) $\dfrac{N}{Ka}$ 2) $N.a$ 3) $N.\mu_x$ 4) $N.\mu_y$

40 ـ اگر میانگین $x_1, x_2, \dots, x_N$ مساوی μ_x باشد، مقدار $\sum(x_i - \mu_x)$ کدام است؟

1) $N.\mu_x$ 2) صفر 3) N 4) یک

41 ـ اگر μ_x میانگین $x_1, \dots, x_N$ باشد، میانگین $\left(-\dfrac{x_N}{2}+3\right), \dots, \left(-\dfrac{x_2}{2}+3\right), \left(-\dfrac{x_1}{2}+3\right)$ کدام است؟

1) $-\mu_x+3$ 2) μ_x+3 3) $-\dfrac{1}{2}\mu_x+3$ 4) $\dfrac{1}{2}\mu_x$

42 ـ اگر $\mu_x = 10$ و $\mu_y = 22$ و $Z = y - x$ باشد، μ_z کدام است؟

1) 32 2) 16 3) 12 4) 6

معیارهای پراکندگی

دامنه تغییرات

43 ـ «چه عدد دیگری» بین 6,5,7,3 و 9 قرار گیرد تا بدون ایجاد تغییر در پارامترهای میانگین، میانه و دامنه تغییرات داده‌ها؛ مد مجموعه، محسوب شود؟

1) 5   2) 6   3) 7   4) 8

انحراف چارکی

44 ـ فرض کنید $Q_1 = 100$، $Md = 140$ و $Q_3 = 180$ باشد؛ نیم‌دامنه کدام است؟

1) 40   2) 30   3) 60   4) 80

45 ـ در جدول داده‌های آماری زیر، انحراف چارکی کدام است؟

50 ـ حدود دسته	49 ـ 15 - 18	48 ـ 18 - 21	47 ـ 21 - 24	46 ـ 24 - 27
55 ـ فراوانی	54 ـ 12	53 ـ 15	52 ـ 19	51 ـ 14

1) 2.1   2) 2.4   3) 2.6   4) 2.9

واریانس نمونه

56 ـ انحراف‌های مقادیر مشاهده شده از میانگین در 6 مورد از یک نمونهٔ 7 تائی به صورت اعداد 5 - , 4 - , 2 - , 1 - , 3 , 4 محاسبه شده؛ «انحراف معیار نمونه» چقدر است؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5

57 ـ در نمونه‌ای به «چه حجم» مجموع مجذورات داده‌ها 61، میانگین 3 و انحراف معیار 2 است؟

1) 4   2) 5   3) 6   4) 7

خواص واریانس

58 ـ اگر از هر یک از مشاهدات سه واحد کم کنیم، در انحراف معیار مشاهدات چه وضعی پیش می‌آید؟

1) ثابت می‌ماند.   2) سه واحد کاسته می‌شود.

3) 9 واحد کاسته می‌شود.   4) هیچ‌کدام.

59 ـ اگر واریانس مقادیر $x_1 , x_2 , \dots , x_N$ برابر 16 باشد، انحراف معیار $\frac{x_1}{4} , \frac{x_2}{4} , \dots , \frac{x_N}{4}$ کدام است؟

1) 4 2) 2 3) 16 4) 1

چی‌بی‌شف

60 ـ اگر X یک متغیر تصادفی با متوسط صفر و واریانس یک باشد آنگاه:

1) $P(|X| \geq 1) \leq \frac{1}{2}$ 2) $P(|X| \geq 1) \leq \frac{1}{2}$

3) $P(|X| \geq 1) \leq 1$ 4) $P(|X| \geq 1) \geq \frac{1}{4}$

61 ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با میانگین 3 و واریانس 4 باشد، یک کران پایین برای $P(X < 6)$ عبارتست از:

1) $\frac{6}{13}$ 2) $\frac{5}{9}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{5}{6}$

میانگین و واریانس کل

62 ـ باتوجه به این اطلاعات میانگین کل کدام است؟

N_i	100	50	150
μ_i	20	50	30

1) 100 2) 30 3) 50 4) 33.33

63 ـ در یک شرکت، میانگین حقوق ماهیانه کارکنان مرد 120000، کارکنان زن 70000 و کلیه کارکنان 100000 تومان بوده، چند درصد کارکنان، «زن» هستند؟

1) 25 2) 30 3) 40 4) 75

کاربرد ضریب تغییرات (CV)

64 ـ اطلاعات نمونه‌ای از کیفیت قطعات تولید شده در دو خط تولید عبارتست از:

خط1: 7 , 5 , 5 , 6, 4 , 3 و خط2: 2 , 4 , 4 , 5 , 3 , 2

کدام خط تولید از دقت بیشتری در تولید کالاهای همگون برخوردار است؟

1) دقت در خط 1 کمتر است. 2) دقت در خط 1 بیشتر است.

3) دقت در دو خط برابر است. 4) نیاز به اطلاعات بیشتری داریم.

محاسبه CV

65ـ اگر $\sum x_i = 60$، $\sum x_i^2 = 400$ و $N = 10$ باشد، ضریب پراکندگی کدام است؟

1) 0.40 2) 0.33 3) 0.70 4) 0.62

66ـ در «چه صورت»؛ ضریب تغییرات حقوق کارکنان یک موسسه، کاهش می‌یابد؟

1) افزایش 5000 تومان به حقوق هر شخص 2) کاهش 5 درصدی از حقوق هر شخص
3) کاهش 5000 تومان از حقوق هر شخص 4) افزایش 5 درصدی حقوق هر شخص

چولگی

67ـ فرض کنید $\mu_x = 37$، $Mo = 43.6$ و واریانس 144 باشد؛ ضریب چولگی پیرسون کدام است؟

1) 0.95 2) -0.55 3) 0.045 4) -0.045

68ـ فرض کنید $Q_1 = 223.55$، $Md = 246$ و $Q_3 = 271.55$ باشد؛ ضریب چولگی کدام است؟

1) 0.60 2) 0.551 3) 0.065 4) 0.089

69ـ در یک توزیع متمایل به چپ، کدام‌یک از این گزینه‌ها صحیح است؟

1) $\mu_x < Md < Mo$ 2) $Md < \mu_x < Mo$
3) $Mo < Md < \mu_x$ 4) $\mu_x < Mo < Md$

رابطه سه معیار تمرکز (در چولگی ضعیف)

70ـ میانگین و میانه یک جامعهٔ آماری به ترتیب 30 و 50 است و توزیع جامعه از چولگی معقولی برخوردار است؛ مد کدام است؟

1) 90 2) 40 3) 25 4) مد ندارد.

کشیدگی

71ـ اگر ضریب کشیدگی توزیعی -0.71 باشد، کدام عبارت درباره پراکندگی این جامعه صادق است؟

1) پراکندگی جامعه نسبت به توزیع نرمال بیشتر و تفاوت آن فاحش است.
2) پراکندگی جامعه نسبت به توزیع نرمال کمتر و تفاوت آن فاحش است.
3) پراکندگی جامعه نسبت به توزیع نرمال بیشتر و تفاوت آن اندک است.
4) پراکندگی جامعه نسبت به توزیع نرمال کمتر و تفاوت آن اندک است.

72ـ اگر $N = 10$، $\sum \left(x_i - \mu_x\right)^4 = 7680$ و انحراف معیار جامعه برابر 4 باشد؛ ضریب کشیدگی کدام است؟

1) 1 2) 3 3) 4 4) 0

73 ـ اگر گشتاور مرتبه چهارم حول میانگین مساوی 162 و واریانس برابر 9 باشد، ضریب کشیدگی کدام است؟

1) 54 2) 18 3) 2.5 4) -1

نمودارها

74 ـ کدام‌یک از این نمودارها برای تحلیل اکتشافی مشاهدات استفاده می‌شود؟

1) بافت نگار 2) دایره‌ای 3) پاره‌تو 4) جعبه‌ای

75 ـ کدام‌یک از این نمودارها برای تحلیل مشاهدات کمی استفاده می‌شود؟

1) شاخه و برگ 2) دایره‌ای 3) پاره‌تو 4) ستونی

76 ـ کدام‌یک از این نمودارها برای نمایش مشاهداتی با مقیاس رتبه‌ای مناسب است؟

1) دایره‌ای 2) چند ضلعی 3) بافت نگار 4) جعبه‌ای

77 ـ کدام‌یک از این نمودارها برای نمایش مشاهداتی با مقیاس نسبی مناسب است؟

1) بافت نگار 2) چند ضلعی 3) جعبه‌ای 4) هر سه مورد

78 ـ در رسم نمودارهای بافت نگار، محور x را براساس کدام اندازه مدرج می‌کنند؟

1) فراوانی‌های نسبی 2) کرانه‌های طبقات
3) متوسط طبقات 4) فراوانی‌های تجمعی

79 ـ در رسم نمودار تجمعی، محور x را براساس کدام اندازه مدرج می‌کنند؟

1) متوسط طبقات 2) کرانه‌های طبقات 3) حد پایین طبقات 4) موارد 1 و 2

80 ـ در کدام‌یک از این نمودارها ارزش مشاهدات هر طبقه یکسان تلقی می‌شود؟

1) منحنی فراوانی تجمعی 2) بافت نگار
3) پلی‌گن فراوانی تجمعی 4) هر سه مورد

تعریفی

1 ــ گزینه 2 صحیح است.
به صفحه 8 کتاب مراجعه کنید.
دقت کنید که چون مقیاس نسبی دارای صفر مطلق است، صفر قراردادی آن در نظر گرفته نمی‌شود.

2 ــ گزینه 1 صحیح است.
به صفحه 3 کتاب مراجعه کنید.

3 ــ گزینه 2 صحیح است.
به جدول صفحه 2 کتاب مراجعه کنید.

4 ــ گزینه 2 صحیح است.
مشخص کردن هدف هرگاه دانش موجود دربارهٔ موضوع مورد نظر، کافی نباشد، به کمک روش‌های تحقیق تلاش برای افزایش آگاهی از موضوع انجام می‌گیرد. امر تحقیق بیشتر ممکن است معطوف به هدف‌های مشخصی باشد؛ از قبیل:
1) اثبات یک نظریهٔ جدید
2) بررسی دقیق نظریهٔ موجود از این لحاظ که تا چه میزانی نتایج منطقی حاصل از آن به وسیلهٔ یافته‌های واقعی تأیید می‌شود.
3) پایه‌ای برای اطلاعات به‌دست آید که تا حدی منعکس‌کنندهٔ وضع جاری امور باشد.
در موارد دیگری هدف تحقیق ممکن است علاوه بر ایجاد ادراکی دقیق‌تر از عوامل عمل‌کننده محیطی، تعیین امکانات و کاربرد آن‌ها، کنترل یا اصلاح امور جنبی یک پدیده را نیز شامل شود.
جمع‌آوری داده‌ها فرایند گردآوری اطلاعات ممکن است به‌صورت:
1) آزمایش‌های پیچیده در شرایط کنترل‌شده
2) بررسی‌های اجتماعی ـ اقتصادی، نظرخواهی، یا حتی بررسی تاریخی باشد.
تجزیه و تحلیل داده‌ها
1) تجزیه و تحلیل داده‌ها منبع اساسی برای کسب اطلاعات جدید دربارهٔ پدیدهٔ مورد مطالعه هستند.
2) می‌توانیم از تجزیه و تحلیل داده‌ها اطلاعات مربوط به موضوعاتی را که در مرحلهٔ مشخص کردن هدف‌ها مطرح شده‌اند، استخراج کنیم.
3) تجزیه و تحلیل دقیق داده‌ها برای بررسی معلومات جدید و تعیین نقاط قوت و ضعف آن‌ها ضروری است.
بیان یافته‌ها تحلیل داده‌ها برای پاسخگویی به سؤالاتی از این قبیل طرح‌ریزی می‌شود.
1) از شواهدی که به وسیلهٔ داده‌ها فراهم می‌آیند چه نکات کلی‌ای دربارهٔ پدیدهٔ تحت مطالعه می‌توان استخراج کرد؟
2) آیا فرضیه یا نظریهٔ موجود با داده‌ها در تناقض است؟
3) آیا داده‌ها نظریهٔ جدیدی را برای تبیین پدیدهٔ تحت مطالعه القا می‌کنند؟
نتایج تجزیه و تحلیل داده‌ها برای جوابگویی به این سؤالات و نیز **سنجش میزان عدم قطعیتی که در جواب‌ها وجود دارد،** به‌کار گرفته می‌شوند.

جدول فراوانی

5 ـ گزینه 4 صحیح است.

به صفحه 14 کتاب مراجعه کنید.

6 ـ گزینه 1 صحیح است.

فراوانی نسبی طبقه iام : $f_i = \frac{F_i}{N} \quad \rightarrow \quad f_3 = \frac{F_3}{N} \quad \rightarrow \quad 0.48 = \frac{12}{N} \quad \rightarrow \quad N = \frac{12}{0.48} = 25$

یادآوری: فراوانی تجمعی دسته آخر برابر با N همان تعداد کل داده‌هاست.

معیارهای تمرکز

مد یا نما (MO)

7 ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری: مد داده‌ای است که دارای بیشترین فراوانی یا تکرار است.

در جدول این سؤال داده $X = 3$ دارای بیشترین فروانی $F_{X_3} = 30$ نسبت به سایر داده‌هاست که مد (نما) داده‌ها است.

8 ـ گزینه 3 صحیح است.

C − L	10 − 20	20 − 30	30 − 40	40 − 50
F_i	0.10	0.20	0.30	0.40

دسته‌ای که دارای بیشترین فراوانی مطلق یا نسبی باشد، دسته مددار است.

در این سؤال دسته چهارم $(50-40)$ دارای بیشترین فراوانی نسبی است پس دسته مددار است.

$$MO = \text{حد پایین دسته} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول دسته} = 40 + \frac{(0.4-0.3)}{(0.4-0.3)+(0.4-0)} \times 10 = 40 + 2 = 42$$

دقت کنید که در صورت سؤال به جای f_i (فراوانی نسبی)، F_i (فراوانی مطلق) تایپ شده است اما مهم نیست زیرا که ما تشخیص می‌دهیم با توجه به این‌که فراوانی‌ها بین 0، 1 هستند، پس حتماً فراوانی نسبی‌اند.

میانه (Md = me)

9 ـ گزینه 3 صحیح است.

C − L	2 − 4	4 − 6	6 − 8	8 − 10
F_i	5	10	5	10
F_{C_i}	5	15	20	30 = N

محل میانه : $F_{C_i} \geq \frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad \rightarrow \quad (4-6)$ دسته دوم

$$Md = \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{N}{2} - F_{C_{i-1}}}{F_i} \times \text{طول دسته} = 4 + \frac{15-5}{10} \times 2 = 6$$

10ـ گزینه 3 صحیح است.

	1 ام تا 10 ام	11 ام تا 30 ام	31 ام تا 40 ام	41 ام تا 55 ام		
	↑	↑	↑	↑		
X_i	-2	-1	0	1	2	3
F_i	10	20	10	15	15	30
F_{C_i}	10	30	40	55	70	$100 = N$

محل میانه: $\frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{100}{2} + \frac{1}{2} = 50.5$

$$Md = X_{(50)} + 0.5\left(X_{(51)} - X_{(50)}\right) = 1 + 0.5(1-1) = 1$$

11ـ گزینه 1 صحیح است.

$$Md = 32.5, N = 40, I = 5, F_{C_{m-1}} = 14, F_m = 10$$

$$Md = \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{N}{2} + F_{C_{i-1}}}{F_i} \times \text{طول دسته}$$

$$32.5 = \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{40}{2} - 14}{10} \times 5 \quad \rightarrow \quad \text{حد پایین دسته} = 32.5 - 3 = 29.5$$

حدود طبقه میانه‌دار: $(29.5, 29.5+5) = (29.5, 34.5)$

12ـ گزینه 2 صحیح است.

ابتدا اعداد را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم: $X_i : 40, 50, \underset{}{\overset{\overset{Md}{\downarrow}}{60}}, 60, 80$

مُد: داده‌ای که دارای بیشترین فراوانی یا تکرار است. $MO = 60$

محل میانه: $\frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad X_{(3)} = Md = 60$

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{40+50+60+60+80}{5} = \frac{290}{5} = 58$$

بنابراین عدد 60 میانه و نمای داده‌هاست.

محاسبه چندک‌ها

13ـ گزینه 3 صحیح است.

$C-L$	$110-119$	$120-129$	$130-139$
F_i	10	20	70
F_{C_i}	10	30	$100=N$

محل چارک اول : $F_{C_i} \geq \frac{N}{4}=\frac{100}{4}=25 \quad \rightarrow \quad (119.5-129.5)$ دسته دوم

دقت کنید که حدود دسته‌ها گسسته است و باید پیوسته شوند. $\frac{120-119}{2}=0.5$

یعنی از حد پایین هر دسته 0.5 را کم و به حد بالای آن اضافه کنیم تا دسته‌ها پیوسته شوند.

$$Q_1 = \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{N}{4}-F_{C_{i-1}}}{F_i} \times \text{طول دسته} = 119.5+\frac{25-10}{20}\times 10 = 119.5+7.5=127$$

14ـ گزینه 4 صحیح است.

ابتدا داده‌ها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم:

	1 ام تا 2 ام	3 ام	4 ام تا 6 ام			
	↑	↑	↑			
X_i	5	7	10	11	14	15
F_i	2	1	3	7	4	2
F_{C_i}	2	3	6	13	17	$N=19$

محل چارک اول : $\frac{N}{4}+\frac{1}{2}=\frac{19}{4}+\frac{1}{2}=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$

$$Q_1 = X_{(5)}+\frac{1}{4}\left(X_{(6)}-X_{(5)}\right)=10+\frac{1}{4}(10-10)=10$$

میانگین هارمونیک $\left(\bar{X}_H\right)$

15ـ گزینه 4 صحیح است.

با توجه به واحد ترکیبی ریال در لیتر از میانگن هارمونیک استفاده می‌کنیم:

$$\bar{X}_H=\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}=\frac{4}{\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.8}+\frac{1}{2.1}+\frac{1}{2.5}}=\frac{4}{\frac{315+280+240+201.6}{504}}$$

$$=\frac{4\times 5040}{10366}=\frac{10080}{5183}=1.94$$

16 ـ گزینه 1 صحیح است.

یادآوری: میانگین هارمونیک برای داده‌های دارای جدول فراوانی عبارت است از: $\bar{x}_H = \dfrac{\sum F_i}{\sum \dfrac{F_i}{x_i}}$

بنابراین در این سؤال داریم:

x_i	3	4	6	9	
F_i	2	4	3	1	$\sum F_i = 10$

$$\bar{x}_H = \frac{\sum F_i}{\sum \frac{F_i}{x_i}} = \frac{10}{\frac{2}{3}+\frac{4}{4}+\frac{3}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{10}{\frac{12+18+9+2}{18}} = \frac{180}{41} = 4.39$$

میانگین هندسی $\left(\bar{X}_G\right)$

17 ـ گزینه 4 صحیح است.

با توجه به اینکه متوسط نرخ خواسته شده است از میانگین هندسی استفاده می‌کنیم:

$$\bar{X}_G = \sqrt[85-80]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[5]{\frac{3200}{100}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}} = 2 \ \text{برابر}$$

$$(2-1)\times 100 = 100 \ \text{درصد}$$

18 ـ گزینه 1 صحیح است.

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} = \sqrt[4]{25\times30\times24\times45} = \sqrt[4]{5^2\times5\times2\times3\times3\times2^3\times3^2\times5}$$

$$= \sqrt[4]{5^4\times2^4\times3^4} = 5\times2\times3 = 30$$

میانگین حسابی

19 ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری: $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

$$5 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 5\times10 = 50$$

$$\mu_{\text{جدید}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 16}{10+1} = \frac{50+16}{11} = \frac{66}{11} = 6$$

20 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$\mu=\frac{\sum F_iX_i}{\sum F_i}=\frac{2\times1+4\times3+8\times5+5\times7+1\times9}{2+4+8+5+1}=\frac{98}{20}=4.9$$

21 ـ گزینه 2 صحیح است.

برای راحتی در محاسبه بهتر است از خواص میانگین استفاده کنیم. ابتدا مرکز دسته‌ها را از 90 کم کرده(مرکز دسته وسط) سپس بر 6 (فاصله طبقات) تقسیم می‌کنیم حال از داده‌های جدید میانگین می‌گیریم. میانگین جدید با $\bar{u}$ برابر خواهد بود.

$$\mu=90+6\bar{u}\quad\rightarrow\quad\bar{u}=\frac{\mu-90}{6}=\mu\left(\frac{x-90}{6}\right)$$

دقت کنید که فراوانی تجمعی داده ها را به شما داده اند اما برای محاسبه میانگین به فراوانی مطلق نیاز داریم بنابراین باید از روی فراوانی تجمعی داده‌ها ، فراوانی مطلق آنها را به‌دست آوریم.

یادآوری : $F_i=F_{C_i}-F_{C_{i-1}}$

x_i	72	78	84	90	96	102
$\frac{x_i-90}{6}$	-3	-2	-1	0	1	2
F_i	3	$9-3=6$	$14-9=5$	$22-14=8$	$29-22=7$	$35-29=6$
F_{C_i}	3	9	14	22	29	$35=N$

$$\bar{u}=\mu\left(\frac{x_i-90}{6}\right)=\frac{\sum F_i\left(\frac{x_i-90}{6}\right)}{N}=\frac{3(-3)+6(-2)+5(-1)+8\times0+7\times1+6\times2}{35}=\frac{-7}{35}=-0.2$$

خواص میانگین حسابی

22 ـ گزینه 1 صحیح است.

$$\mu_Y=a\mu_X\quad\rightarrow\quad\frac{\sum_{i=1}^{K}Y_i}{K}=a\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{N}\quad\rightarrow\quad\frac{\sum X_i}{\sum Y_i}=\frac{N}{aK}$$

23 ـ گزینه 2 صحیح است.

یکی از مهم‌ترین خاصیت‌های میانگین حسابی این است که مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

به صفحه 60 کتاب مراجعه کنید.

24 ـ گزینه 3 صحیح است.

طبق خاصیت خطی بودن میانگین داریم: $\mu_{-\frac{x_i}{2}+3} = -\frac{1}{2}\mu_x + 3$

به صفحه 61 کتاب مراجعه کنید.

25 ـ گزینه 3 صحیح است.

طبق خاصیت خطی بودن میانگین داریم: $\mu_Z = \mu_{Y-X} = \mu_Y - \mu_X = 22 - 10 = 12$

معیارهای پراکندگی

دامنه تغییرات

26 ـ گزینه 2 صحیح است.

می‌دانیم که مد: داده‌ای است که دارای بیشترین تکرار (فراوانی) باشد. در حال حاضر داده‌ها فاقد مد هستند، زیرا هر کدام یک بار تکرار شده اند. بنابراین باید یکی از داده‌های مجموعه یک بار دیگر تکرار شود تا مد مجموعه به حساب آید. یعنی باید یکی از اعداد 9 ,7 ,6 ,5 ,3 باشد.

راه حل اول: در صورت سؤال شرط شده است که پارامترهای میانگین، میانه و دامنه تغییرات تغییری نکند بنابراین بهتر است قبل از اضافه کردن عددی به مجموعه این سه پارامتر را به‌دست آوریم:

ابتدا داده ها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم : $x_i = 3\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 9$

$$\text{دامنه تغییرات} = x_{(n)} - x_{(1)} = 9 - 3 = 6$$

$$\text{محل میانه: میانه} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad \text{میانه} = x_{(3)} = 6$$

$$\text{میانگین}\ \mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{3+5+6+7+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

برای اینکه دامنه تغییرات تغییری نکند باید 3 کمترین داده و 9 بیشترین داده باقی بمانند. البته چون داده جدید باید از همین سری اعداد باشد، دامنه تغییرات هیچ گاه تغییر نخواهد کرد.

میانه داده وسط است. برای اینکه مقدار میانه تغییری نکند چون با اضافه کردن مقدار جدید تعداد داده‌ها N=6 خواهد شد بنابراین میانه برابر میانگین دو عدد وسط خواهد بود 9 , 7 , d , 6 , 5 , 3 پس باید عدد دیگر که قبل یا بعد میانه قرار می‌گیرد همان 6 باشد تا تغییری در میانه حاصل نشود.

$$\text{محل میانه} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} \rightarrow \text{میانه} = X_{(3)} + \frac{1}{2}\left(X_{(4)} - X_{(3)}\right) = 6 + \frac{1}{2}(d - 6) = 6$$

بنابراین تنها اگر عدد اضافی 6 باشد در میانه تغییری ایجاد نخواهد شد. میانگین نیز چون 6 است تنها عددی که آن را تغییر نخواهد داد همان مقدار میانگین یعنی عدد 6 است. بنابراین عدد اضافی که به عنوان مد مجموعه به حساب می‌آید عدد 6 خواهد بود.

راه حل دوم: اگر این گونه استدلال کردن برایتان مشکل است، پس از محاسبهٔ 3 معیار دامنه تغییرات و میانه و میانگین داده‌ها، اعدادی که در گزینه‌ها پیشنهاد شده است را یک به یک امتحان کنید و دوباره پارامترها را محاسبه کنید آن عددی که مقدار پارامترهای اولیه را تغییر ندهد به عنوان جواب انتخاب کنید فقط توجه کنید که گزینه 4 چون عدد 8 است نمی‌تواند امتحان شود زیرا دیگر مد به حساب نخواهد آمد.

انحراف چارکی

27 ـ گزینه 4 صحیح است.

(نیم دامنه) : $IQR = Q_3 - Q_1 = 180 - 100 = 80$

به صفحه 66 کتاب مراجعه کنید.

28 ـ گزینه 3 صحیح است.

توجه: هرگاه جدول توزیع فراوانی داده شد و مقدار چندک (چارک، دهک، صدک، میانه) خواسته شد، بهتر است ابتدا سطر فراوانی تجمعی داده‌ها را به جدول اضافه کنیم و سپس به طریق زیر عمل کنیم.

		$Q_1 \downarrow$	$Q_3 \downarrow$		
حدود دسته	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	
فراوانی مطلق	12	d	d	14	$\sum F_i = N = 60$
فراوانی تجمعی	12	27	46	60	

برای به‌دست آوردن مقدار انحراف چارکی $SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ به دو مقدار چارک اول و سوم نیازمندیم بنابراین ابتدا Q_1 , Q_3 را پیدا می‌کنیم.

محل چارک اول: اولین دسته‌ای که فراوانی تجمعی‌اش بزرگتر یا مساوی $\frac{N}{4} = \frac{60}{4} = 15$ باشد، شامل چارک اول است که در این سؤال دسته دوم است زیرا:

محل چارک اول : $F_{C_2} = 27 \geq \frac{N}{4} = 15 \rightarrow (18 - 21)$ دسته دوم

$$Q_1 = \text{حد پایین دسته چارک} + \frac{\frac{N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} * \text{طول دسته} = 18 + \frac{\frac{60}{4} - 12}{15} \times 3 = 18 + \frac{3}{5} = 18.6$$

محل چارک سوم: اولین دسته‌ای که فراوانی تجمعی‌اش بزرگتر یا مساوی $\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 60}{4} = 45$ باشد، شامل چارک سوم است که در این سؤال دسته سوم است زیرا:

محل چارک سوم : $F_{C_3} = 46 \geq \frac{3N}{4} = 45 \rightarrow (21 - 24)$ دسته سوم

$$Q_3 = \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{3N}{4} - F_{C_{i-1}}}{F_i} * \text{طول دسته} = 21 + \frac{\frac{3 \times 60}{4} - 27}{19} \times 3 = 21 + \frac{18}{19} \times 3 = 23.84$$

حال مقدار پارامتر انحراف چارکی عبارت است از:

$$SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{23.84 - 18.6}{2} = \frac{5.24}{2} = 2.62$$

واریانس نمونه

29 ـ گزینه 3 صحیح است.

توجه 1: انحراف معیار نمونه خواسته شده است بنابراین از فرمول واریانس نمونه استفاده خواهیم کرد.

$$S^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n - 1}$$

توجه 2: داده‌های مسئله به صورت انحراف مقادیر مشاهده شده از میانگین هستند. یعنی $\left(x_i - \bar{x}\right)$ و همچنین 6 مورد از نمونه 7تایی داده شده و یک مورد را خودمان باید بدست آوریم.

$$\left(x_1 - \bar{x}\right) = -5 \,,\, \left(x_2 - \bar{x}\right) = -4 \,,\, \left(x_3 - \bar{x}\right) = -2 \,,\, \ldots \,,\, \left(x_7 - \bar{x}\right) = ?$$

یادآوری: مجموع انحرافات مقادیر مشاهده شده از میانگین برابر صفر است $\sum \left(x_i - \bar{x}\right) = 0$ این مهم‌ترین خاصیت میانگین حسابی است.

حال باتوجه به موارد بالا با جمع بستن مقادیر انحراف از میانگین برای 7 داده و برابر صفر قرار دادن آنها مقدار انحراف داده هفتم از میانگین $\left(x_7 - \bar{x}\right)$ به‌دست خواهد آمد.

$$\sum_{i=1}^{7} \left(x_i - \bar{x}\right) = 0 \rightarrow -5 - 4 - 2 - 1 + 3 + 4 + \left(x_7 - \bar{x}\right) = 0 \rightarrow \left(x_7 - \bar{x}\right) = 5$$

حال با استفاده از فرمول واریانس نمونه به‌سادگی واریانس نمونه به‌دست خواهد آمد.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n - 1} = \frac{(-5)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2}{7 - 1} = \frac{96}{6} = 16 \rightarrow S = 4$$

30 ـ گزینه 2 صحیح است.

نکته: با توجه به کلمه «**نمونه**» در صورت سؤال از فرمول واریانس نمونه استفاده می شود.

$$S^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1}\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right]$$

$$S=2 \;\rightarrow\; S^2=4 \;\rightarrow\; 4=\frac{1}{n-1}\left[61-\frac{(3n)^2}{n}\right] \;\rightarrow\; 4=\frac{1}{n-1}\left[61-\frac{9n^2}{n}\right] \;\rightarrow$$

$$4=\frac{1}{n-1}(61-9n) \;\rightarrow\; 4n-4=61-9n \;\rightarrow\; 13n=65 \;\rightarrow\; n=\frac{65}{13}=5 \;\rightarrow\; \boxed{n=5}$$

یادآوری:

$$\begin{cases} \mu=3 \;\rightarrow\; \mu=\dfrac{\sum x_i}{n} \;\rightarrow\; \sum x_i=3n \\ \sum x_i^2 = \text{مجموع مجذورات داده‌ها} = 61 \end{cases}$$

خواص واریانس

31 ـ گزینه 1 صحیح است.

از هریک از مشاهدات 3 واحد کم می‌کنیم. $\leftarrow\; X_i-3$

$$\sigma\left(X_i-\underbrace{\cancel{3}}_{0}\right)=\sigma_X$$

32 ـ گزینه 4 صحیح است.

$$\sigma_X^2=16 \;\rightarrow\; \sigma_X=4$$

$$\sigma\left(\frac{X_i}{4}\right)=\left|\frac{1}{4}\right|\sigma_X=\frac{1}{4}\times4=1$$

چی‌بی‌شف

33 ـ گزینه 3 صحیح است.

بنابر قضیه چی‌بی‌شف داریم:

$$P\left(|X-\mu|\ge k\sigma\right)\le\frac{1}{k^2}$$

حال در این سؤال که $\mu=0$ و $\sigma^2=1$ است داریم:

$$P\left(|X-0|\ge k\right)\le\frac{1}{k^2} \xrightarrow[k=1]{\text{در این سؤال}} P\left(|X|\ge1\right)\le1$$

34 ـ گزینه 2 صحیح است.

توجه: هرگاه حداقل و یا حداکثر یک احتمال خواسته شد از قضیه چی‌بی‌شف استفاده خواهیم کرد. در این سؤال نیز کران پائین $a\le P(X<6)$ یا همان حداقل احتمال خواسته شده است بنابراین:

ابتدا با توجه به اینکه X نامنفی $(X>0)$ است حدود x را در احتمال به‌صورت $P(0<X<6)$ تکمیل می‌کنیم.

قضیه چی‌بی‌شف :

$$\begin{cases} P(\underbrace{\mu - k\sigma}_{a} < X < \underbrace{\mu + k\sigma}_{b}) \ge 1 - \frac{1}{k^2} \to P(0 < X < 6) \ge 1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{9}{4}} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \\ k\sigma = \frac{b-a}{2} \xrightarrow[b=6]{a=0} k\sigma = \frac{6-0}{2} = 3 \xrightarrow[\sigma=2]{\sigma^2=4} k \times 2 = 3 \to k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

میانگین و واریانس کل

35 ـ گزینه 2 صحیح است.

N_i	100	50	150
μ_i	20	50	30

$$\text{کل } \mu = \frac{\sum N_i \mu_i}{\sum N_i} = \frac{100 \times 20 + 50 \times 50 + 150 \times 30}{100 + 50 + 150} = \frac{2000 + 2500 + 4500}{300} = 30$$

36 ـ گزینه 3 صحیح است.

یادآوری: میانگین کل حقوق کارکنان از طریق رابطه مقابل به‌دست می‌آید. $\text{کل } \mu = \frac{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2}{n_1 + n_2}$

در این سؤال μ کل برابر 100000 و μ_1 (میانگین حقوق کارکنان مرد) برابر 120000 و μ_2 (میانگین حقوق کارکنان زن) برابر 70000 داده شده است.

توجه به یک نکته ضروری است: درصد کارکنان زن یعنی تعداد کارکنان زن به کل کارکنان و درصد کارکنان مرد یعنی تعداد کارکنان مرد به کل کارکنان و می‌دانیم که جمع دو درصد برابر یک خواهد بود.

$$\begin{cases} \text{درصد کارکنان زن} = p_w = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \\ \text{درصد کارکنان مرد} = p_m = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \end{cases} \to p_w + p_m = \frac{n_2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 + n_1}{n_1 + n_2} = 1$$

حال باتوجه به نکته گفته شده و رابطه میانگین کل داریم:

$$\text{کل } \mu = \frac{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \mu_1}{n_1 + n_2} + \frac{n_2 \mu_2}{n_1 + n_2} = p_m \mu_1 + p_w \mu_2$$

$$\text{کل } \mu = p_m \mu_1 + p_w \mu_2 \quad \to \quad 100000 = p_m \times 120000 + p_w\, 70000$$

$$p_m + p_w = 1 \to p_m = 1 - p_w \to 100000 = \left(1 - p_w\right) 120000 + p_w\, 70000 \quad \to$$

$$100000 = 120000 - 120000\, p_w + 70000\, p_w \to 50000 p_w = 20000 \to \boxed{p_w = 0.4 = \%40}$$

37 ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری: برای مقایسه دو جامعه یا دو نمونه در صورتی که دارای واحد اندازه‌گیری یکسان و میانگین‌های مساوی باشند، از ملاک واریانس دو جامعه استفاده می‌شود و در صورتی که واحد اندازه‌گیری‌اشان متفاوت باشد یا میانگین‌هایشان متفاوت باشد از ضریب پراکندگی (CV) برای مقایسه آنها استفاده می‌شود.

دقت کنید که داده‌های داده شده نمونه‌اند پس باید از فرمول واریانس نمونه استفاده کنیم.

$X_i : 3,4,6,5,5,7$

$$\begin{cases} \bar{X} = \dfrac{\sum X}{n} = \dfrac{3+4+6+5+5+7}{6} = \dfrac{30}{6} = 5 \\ S_x^2 = \dfrac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \dfrac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2}{6-1} = 2 \end{cases}$$

$Y_i : 2, 3, 5, 4, 4, 2$

$$\begin{cases} \bar{Y} = \dfrac{\sum Y_i}{n} = \dfrac{2+3+5+4+4+2}{6} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3} \\ S_y^2 = \dfrac{\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{n-1} = \dfrac{\left(\frac{6}{3}-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{9}{3}-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{12}{3}-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{12}{3}-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}-\frac{10}{3}\right)^2}{6-1} = \dfrac{22}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CV_x = \dfrac{S_x}{\bar{X}} = \dfrac{\sqrt{2}}{5} = \dfrac{1.41}{5} = 0.282 \\ CV_y = \dfrac{S_y}{\bar{Y}} = \dfrac{\sqrt{\frac{22}{15}}}{\frac{10}{3}} = \dfrac{\sqrt{1.46}}{3.33} = \dfrac{1.21}{3.33} = 0.363 \end{cases} \rightarrow CV_x < CV_y \rightarrow$$ دقت خط (1) بیشتر است

محاسبه CV

38 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{60}{10} = 6 \text{ و } \sigma^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{400}{10} - 6^2 = 40 - 36 = 4 \quad \rightarrow \quad \sigma = 2$$

39 ـ گزینه 1 صحیح است.

(ضریب تغییرات) : $CV = \frac{\sigma}{\mu}$

1) افزایش 5000 به حقوق هر شخص:

$$X+5000 \to C.V = \frac{\sigma(X+\overset{0}{\cancel{5000}})}{\mu(X+5000)} = \frac{\sigma_X}{\mu_X+5000} \xrightarrow[\text{کل کسر کوچکتر}]{\text{مخرج بزرگتر}} C.V(X+5000) < C.V(X)$$

3) کاهش 5000 از حقوق هر شخص:

$$X-5000 \to C.V = \frac{\sigma(X-\overset{0}{\cancel{5000}})}{\mu(X-5000)} = \frac{\sigma_x}{\mu_x-5000} \xrightarrow[\text{کل کسر بزرگتر}]{\text{مخرج کوچکتر}} C.V(X-5000) > C.V(X)$$

2) کاهش 5 درصد از حقوق هر شخص:

$$X-0.05X = 0.95X \to C.V = \frac{\sigma(0.95x)}{\mu(0.95x)} = \frac{0.95\sigma_X}{0.95\mu_X} = \frac{\sigma}{\mu} \to C.V(0.95x) = C.V(X)$$

4) افزایش 5 درصد به حقوق هر شخص:

$$X+0.05X = 1.05X \to C.V = \frac{\sigma(1.05x)}{\mu(1.05x)} = \frac{1.05\sigma_X}{1.05\mu_X} = \frac{\sigma}{\mu} \to C.V(1.05x) = C.V(X)$$

نتیجه کلی: افزایش و یا کاهش a درصد از حقوق هر شخص تغییری در ضریب تغییرات ایجاد نمی‌کند.

افزایش a تومان به حقوق هر شخص، ضریب تغییرات را کاهش و کاهش a تومان از حقوق هر شخص ضریب تغییرات را افزایش خواهد داد.

در صورتی که a عددی بزرگتر از صفر باشد، داریم:

$$\begin{cases} CV_{\%aX} = CV_X \\ CV_{X+a} < CV_X \\ CV_{X-a} > CV_X \end{cases}$$

یادآوری: خواص میانگین و انحراف معیار:

$$\begin{cases} \mu(ax+b) = a\mu_x + b \\ \sigma(ax \overset{0}{\cancel{+b}}) = |a|\sigma_x \end{cases}$$

چولگی

40 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$SK = \frac{\mu - MO}{\sigma} = \frac{37-43.6}{\sqrt{144}} = \frac{-6.6}{12} = -0.55$$

$\mu_x = 37$, $Mo = 43.6$, $\sigma^2 = 144$

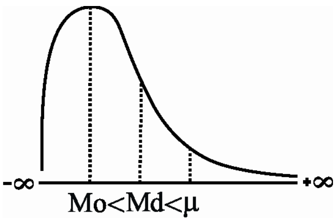
41 ـ گزینه 3 صحیح است.

$$SK=\frac{Q_3-2Q_2+Q_1}{Q_3-Q_1}=\frac{271.55-2\times 246+223.55}{271.55-223.55}=\frac{3.1}{48}=0.0645$$

$$Q_1=223.55\ ,\ Q_2=Md=246\ ,\ Q_3=271.55$$

42 ـ گزینه 3 صحیح است.

در توزیع مایل به چپ یا چوله به راست داریم:



رابطه سه معیار تمرکز (در چولگی ضعیف)

43 ـ گزینه 1 صحیح است.

راه حل تستی: با توجه به اینکه $\mu=30<Md=50$ است و میانه همیشه وسط میانگین و مد قرار دارد نتیجه می‌گیریم که مد از میانه بزرگ‌تر است و تنها گزینه (1) از 50 بزرگ‌تر است.

راه حل دوم:

$$\mu-MO=3(\mu-Md)$$

$$30-MO=3(30-50)$$

$$MO=30+60=90$$

کشیدگی

44 ـ گزینه 1 صحیح است.

با توجه به منفی بودن ضریب کشیدگی بنابراین توزیع جامعه از توزیع نرمال کوتاه‌تر است در نتیجه پراکندگی آن از توزیع نرمال بیشتر است.

همچنین چون $0.5<|-0.71|$ است، بنابراین تفاوت آن با توزیع نرمال فاحش است.

45 ـ گزینه 4 صحیح است.

ضریب کشیدگی: $$E=\frac{\frac{\sum(x_i-\mu)^4}{N}}{\sigma^4}-3=\frac{\frac{7680}{10}}{4^4}-3=0$$

$$N=10\ ,\ \sum(x_i-\mu_x)^4=7680\ ,\ \sigma=4$$

46 ـ گزینه 4 صحیح است.

ضریب کشیدگی : $E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{162}{9^2}-3=2-3=-1$

گشتاور مرتبه چهارم حول میانگین: $\mu_4=\frac{\sum(x_i-\mu_x)^4}{N}=162 \quad , \quad \sigma^2=9$

نمودارها

47 ـ گزینه 4 صحیح است.

به صفحه 128 کتاب مراجعه کنید.

48 ـ گزینه 1 صحیح است.

به صفحه 129 کتاب مراجعه کنید.

49 ـ گزینه 1 صحیح است.

به صفحه 131 کتاب مراجعه کنید.

50 ـ گزینه 4 صحیح است.

به صفحات 126 تا 129 کتاب مراجعه کنید.

51 ـ گزینه 2 صحیح است.

به صفحه 126 کتاب مراجعه کنید.

52 ـ گزینه 4 صحیح است.

به صفحه 128 کتاب مراجعه کنید.

53 ـ گزینه 3 صحیح است.

به صفحه 128 کتاب مراجعه کنید.

در نمودار فراوانی تجمعی که با دو روش (الف) و (ب) انجام می‌شود. در روش (الف) منحنی به‌دست آمده «پلی‌گن فراوانی تجمعی» و در روش (ب) منحنی به‌دست آمده «منحنی فراوانی تجمعی» نام دارد.

خودآزمایی

آنالیز ترکیبی

1 ـ به چند طریق می‌توان با اعداد صفر تا 9، شماره تلفن 6 رقمی ساخت؟

1) 10^6 2) 9^6 3) 9×10^5 4) 6×10^5

2 ـ به چند طریق می‌توان از 12 کتاب که 5 تای آن آمار و بقیه ریاضی هستند، یک کتاب آمار و 2 کتاب ریاضی را به عنوان کتاب سال برگزید؟

1) 220 2) 205 3) 110 4) 105

3 ـ دانشجویی موظف است از 5 سؤال اول به 3 سؤال، و از 15 سؤال بعد به 12 سؤال جواب دهد، به چند طریق می‌تواند به سؤالات جواب دهد؟

1) 5054 2) 5540 3) 4550 4) 5450

4 ـ برای چراغانی کردن سر در یک شرکت2 لامپ قرمز، 3 لامپ زرد و 4 لامپ آبی موجود است. با قرار دادن این لامپ ها در یک ردیف به چند شکل می‌توان چراغانی کرد؟

1) 1080 2) 1260 3) 1170 4) 1350

5 ـ با حروف کلمه EHSAN چند کلمه 3 حرفی می‌توان ساخت به گونه‌ای که شامل حرف A باشند؟

1) 24 2) 30 3) 12 4) 36

6 ـ به چند طریق می‌توان یک گروه حداقل 2 نفره از بین 7 نفر انتخاب نمود؟

1) 119 2) 120 3) 101 4) 146

7 ـ به چند طریق می‌توان از بین اعضای 12 نفره تیمی، 3 نفر را جهت مقام‌های اول تا سوم انتخاب کرد؟

1) 110 2) 220 3) 1100 4) 1320

8 ـ چند عدد 5 رقمی یا 6 رقمی می‌توان با رقم‌های 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 4 درست کرد؟

1) 120 2) 240 3) 720 4) 1440

روابط احتمالاتی

9 ـ اگر $P(A)=0.59$ و $P(B)=0.3$ ، $P(A \cap B)=0.21$ ، آن‌گاه مقدار $P(A \cap \overline{B})$ کدام است؟ ($\overline{B}$ متمم B می‌باشد.)

1) 0.56 2) 0.38 3) 0.28 4) 0.18

10ـ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و احتمال آن دو به ترتیب a و b باشد مقدار $P\left(A^c \cap B^c\right)$ کدام است؟ (A^c متمم A است.)

1) $b-a$ 2) $1-ab$ 3) $1-a-b$ 4) $1+a+b$

11ـ در یک دانشکده، 50% دانشجویان فوتبال، 40% بسکتبال، 30% هم فوتبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند. احتمال آن‌که دانشجویی در این دانشکده ورزش نکند، کدام است؟

1) 0 2) 0.1 3) 0.4 4) 0.6

12ـ سه سکه را که شانس شیر آمدن با آن‌ها $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است با هم می‌اندازیم. احتمال این‌که دست کم یک شیر دیده شود برابر است با:

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{8}$ 3) $\frac{1}{12}$ 4) $\frac{5}{12}$

13ـ احتمال کار کردن یک نفر در یک شرکت معینی برای مدت بیشتر از 10 سال برابر $\frac{1}{6}$ است. اگر دو فرد A و B کار خود را همزمان در این شرکت شروع کنند احتمال این‌که فقط یک نفر از آن‌ها بیشتر از 10 سال در شرکت بماند، کدام است؟

1) $\frac{11}{36}$ 2) $\frac{5}{36}$ 3) $\frac{25}{36}$ 4) $\frac{5}{18}$

احتمال

14ـ احتمال آن‌که مقداری که به صورت تصادفی از جامعه‌ای انتخاب می‌شود بیشتر از میانگین آن جامعه باشد چقدر است؟

1) 0.25 2) 0.5 3) 1 4) 0.67

15ـ سیستمی دارای دو جزء است که احتمال کار نکردن هر کدام از آن‌ها 0.20 است، اگر اجزا به صورت موازی قرار گرفته باشند، احتمال کار کردن سیستم چقدر است؟

1) 0.96 2) 0.04 3) 0.40 4) 0.64

16ـ فرض کنید احتمال داشتن فرزند پسر و دختر مساوی باشد. احتمال این‌که خانواده‌ای که 3 فرزند دارد،، حداقل یک فرزند پسر داشته باشد، چقدر است؟

1) $\frac{5}{8}$ 2) $\frac{6}{8}$ 3) $\frac{7}{8}$ 4) 1

17ـ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد بالا قرار گرفته از تاس اول کوچکتر از عدد بالا قرار گرفته از تاس دوم باشد، چقدر است؟

1) 0.42 2) 0.55 3) 0.20 4) 0.69

18 ـ یک عدد 3 رقمی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، کدامیک از موارد زیر، احتمال آن است که این عدد حداقل یک رقم 1، داشته باشد؟

1) 0.72 2) 0.029 3) 0.28 4) 0.69

احتمال (باجایگذاری و بدون جایگذاری)

19 ـ از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد دانشکده‌ای در یک دوره، 6 نفر شاغل و 4 نفر سرکار نرفته‌اند؛ در صورت تماس تصادفی با 7 نفر آنان، «چند درصد» احتمال دارد بتوان از 2 نفرشان دعوت به کار نمود؟

1) 30 2) 50 3) 40 4) 20

20 ـ از 10 واحد کالای برگشتی از فروش هر روزه در یک شرکت، تعداد 7 واحد به تصادف انتخاب و بازرسی می‌شوند؛ هرگاه در یک روز: تعداد 6 واحد از کالاهای برگشتی واقعاً معیوب باشد؛ احتمال وجود 3 واحد کالای معیوب در نمونه انتخابی، «چقدر» است؟

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{6}{7}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{3}{7}$

21 ـ از 12 عدد کالای همگن داخل جعبه‌ای، 4 عدد معیوب بوده؛ یک مشتری 3 عدد آنها را به طور تصادفی یکی بعد از دیگری برداشته و بررسی می‌نماید. احتمال آنکه 2 عدد اول سالم و سومی معیوب باشد «چقدر» است؟

1) $\frac{28}{165}$ 2) $\frac{4}{27}$ 3) $\frac{28}{55}$ 4) $\frac{4}{16}$

22 ـ از حروف کلمه ORIGIN به طور تصادفی دو حرف حذف می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از حروف حذف شده، I است؟

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{3}{5}$ 3) $\frac{4}{10}$ 4) $\frac{5}{11}$

23 ـ در جعبه‌ای، 4 توپ سفید و 8 توپ سیاه قرار دارد. دو توپ به تصادف و بدون جای‌گذاری از آن خارج می‌کنیم. کدامیک از موارد ذیل، احتمال آن را نشان می‌دهد که توپ دوم، سفید باشد؟

1) $\frac{1}{1}$ 2) $\frac{1}{12}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2}{11}$

24 ـ اگر دورن کیسه‌ای 20 عدد مهره سفید و 30 عدد مهره سیاه باشد و از درون آن 2 عدد مهره با جایگزینی بر داریم، احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد، برابر است با:

1) $\frac{2}{25}$ 2) $\frac{3}{25}$ 3) $\frac{4}{25}$ 4) $\frac{1}{5}$

25ـ در یک میهمانی، شش زوج ازدواج کرده، شامل 6 مرد و همسران آن‌ها شرکت دارند. اگر به طور تصادفی دو نفر از بین آن‌ها انتخاب کنیم، احتمال آن‌که این دو نفر زن و شوهر باشند، کدام است؟

1) $\frac{1}{12}$ 2) $\frac{1}{11}$ 3) $\frac{2}{11}$ 4) $\frac{1}{6}$

احتمال شرطی

26ـ ظرفی حاوی 5 مهره قرمز و 7 مهرهٔ سفید است. مهره‌ای را به طور تصادفی از ظرف خارج می‌کنیم، اگر قرمز بود به همراه آن یک مهرهٔ قرمز دیگر، و اگر سفید بود به همراه آن 2 مهرهٔ سفید دیگر به داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دوم را برحسب تصادف خارج می‌کنیم، اگر بدانیم مهرهٔ خارج شده در بار اول سفید بوده است، احتمال آن‌که مهرهٔ دوم قرمز باشد چقدر است؟

1) $\frac{9}{14}$ 2) $\frac{5}{12}$ 3) $\frac{9}{12}$ 4) $\frac{5}{14}$

27ـ اگر $P(A)=\frac{1}{3}\,,\,P(B)=\frac{1}{5}\,,\,P(A|B)=\frac{1}{3}$ باشد، $P(A\cup B)$ چقدر است؟

1) $\frac{6}{15}$ 2) $\frac{7}{15}$ 3) $\frac{8}{15}$ 4) $\frac{9}{15}$

28ـ 120 دانشجو طبق جدول زیر توزیع شده‌اند. یک دانشجو به تصادف انتخاب می‌کنیم، مرد است. احتمال اینکه رشته ریاضی باشد، چقدر است؟

1) $\frac{1}{12}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{6}$

رشته \ جنس	مرد	زن	جمع
فیزیک	20	30	50
ریاضی	10	60	70
جمع	30	90	120

29ـ از جعبه‌ای شامل 3 خودکار سبز، 4 خودکار قرمز و 5 خودکار مشکی هم اندازه؛ یک خودکار به تصادف برداشته و مشاهده شده که مشکی نبوده، احتمال قرمز بودن آن چقدر است؟

1) $\frac{4}{7}$ 2) $\frac{4}{12}$ 3) $\frac{4}{8}$ 4) $\frac{7}{12}$

30ـ کیسه‌ای شامل دو گلوله سفید و دو گلوله سیاه است. از این کیسه دو گلوله به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن هر دو گلوله به شرطی که اقلاً یکی از آن‌ها سفید باشد برابر است با:

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{5}$

31 ـ در یک بار پرتاب تاسی که احتمال نتیجه زوج داشتن آن سه برابر احتمال فرد داشتن آن است، اگر بدانیم نتیجه‌ای بزرگ‌تر از سه به‌دست آمده، با چه احتمالی نتیجه پرتاب تاس مربع کامل بوده است؟

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{4}{12}$ 4) $\frac{3}{7}$

احتمال متوسط

32 ـ ظرفی حاوی 5 مهره قرمز و 7 مهرهٔ سفید است. مهره‌ای را به طور تصادفی از ظرف خارج می‌کنیم، اگر قرمز بود به همراه آن یک مهرهٔ قرمز دیگر، و اگر سفید بود به همراه آن 2 مهرهٔ سفید دیگر به داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دوم را برحسب تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که مهرهٔ دوم قرمز باشد چقدر است؟

1) $\frac{125}{312}$ 2) $\frac{5}{24}$ 3) $\frac{37}{161}$ 4) $\frac{7}{32}$

33 ـ در سؤال قبل، احتمال همرنگ نبودن 2 مهره چقدر است؟

1) $\frac{45}{104}$ 2) $\frac{59}{104}$ 3) $\frac{125}{312}$ 4) $\frac{187}{312}$

قضیه بیز

34 ـ احتمال اینکه یک حادثهٔ اتومبیل ناشی از نقص ترمز باشد 0.04 و احتمال اینکه آن را به درستی ناشی از نقص ترمز بدانند 0.82 و احتمال اینکه آن را به غلط به نقص ترمز نسبت دهند 0.03 است. احتمال آنکه یک حادثه اتومبیل را که به نقص ترمز نسبت داده‌اند واقعاً ناشی از نقص ترمز باشد، چقدر است؟

1) 0.0328 2) 0.5325 3) 0.0288 4) 0.3525

35 ـ ظرف A ، 5 توپ سفید و7 توپ سیاه دارد، در ظرف B نیز 3 توپ سفید و 12 توپ سیاه قرار دارد سکه‌ای را پرتاب کرده اگر شیر ظاهر شود یک توپ از ظرف A و اگر خط ظاهر شود یک توپ از ظرف B انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که توپ انتخاب شده سفید باشد، احتمال اینکه سکه خط آمده باشد را بدست آورید.

1) $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{1}{10}$ 3) $\frac{25}{37}$ 4) $\frac{12}{37}$

آنالیز ترکیبی

1ـ گزینه 3 صحیح است.

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\times 10^5$$

با توجه به اینکه شماره تلفن‌ها رقم سمت چپ‌شان صفر نیست پس 9 حالت می‌تواند برای رقم سمت چپ در نظر گرفته شود و برای بقیه حالات چون تکراری بودن ارقام مهم نیست، هر 10رقم می‌توانند استفاده شوند.

بنابراین: 9×10^5

2ـ گزینه 4 صحیح است.

$$\binom{5}{1}\binom{12-5}{2}=\binom{5}{1}\binom{7}{2}=5\times\frac{6\times 7}{2}=105$$

3ـ گزینه 3 صحیح است.

$$\binom{5}{3}\binom{15}{12}=10\times\frac{13\times 14\times 15}{3!}=10\times 13\times 7\times 5=4550$$

4ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری: جایگشت n شیء در یک ردیف به‌طوری که n_1 تای آنها شبیه هم، n_2 تای آنها شبیه هم و ... n_k تای آنها شبیه هم باشد برابر است با: $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

در این سؤال نیز کلاً 9 لامپ موجود است که 2 تای آن قرمز (شبیه هم)، 3 تای آن زرد (شبیه هم) و 4 تای آن آبی (شبیه هم) است بنابراین جایگشت آنها در یک ردیف عبارت است از: $\frac{9!}{2!3!4!}=1260$

5ـ گزینه 4 صحیح است.

حروف کلمه EHSAN شامل 5 حرف متمایز است می‌خواهیم 3 حرف از بین آنها انتخاب کنیم به گونه‌ای که حتماً A در بین‌شان باشد بنابراین ابتدا حرف A را بر می‌داریم سپس از بین 4 حرف باقیمانده EHSN دو حرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم. $\binom{4}{2}$ حال با توجه به جایگشت 3 حرف در کلمه که به (3!) حالت می‌توانند جابجا شوند و کلمات متفاوت بسازند داریم: $3!\times\binom{4}{2}=6\times\frac{4!}{2!2!}=6\times 6=36$

6ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری:کل حالات انتخاب k نفر از n نفر برابر 2^n است. $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{k}+\dots+\binom{n}{n}$

در این سؤال می‌خواهیم از بین 7 نفر، یک تیم حداقل دو نفره تشکیل دهیم بنابراین داریم:

$$2^7 = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \underbrace{\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \ldots + \binom{7}{7}}_{\text{حداقل 2 نفره}}$$

$$\text{حداقل دو نفره} = 2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1} = 128 - 1 - 7 = 120$$

7 ــ گزینه 4 صحیح است.

یادآوری: انتخاب k نفر از n نفر بدون جایگذاری به‌طوری که ترتیب افراد انتخاب شده مهم باشد ترتیب k از n خواهد بود. $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

در این سؤال می‌خواهیم از بین 12 نفر، 3 نفر را انتخاب کنیم به‌طوری که به آن سه نفر مقام‌های اول و دوم و سوم بدهیم یعنی مهم است که کدام‌یک اول و کدام‌یک دوم و کدام سوم باشد. بنابراین ترتیب انتخاب اهمیت دارد و از ترتیب 3 از 12 استفاده می‌کنیم. $P_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 10 \times 11 \times 12 = 1320$

8 ــ گزینه 2 صحیح است.

می‌خواهیم با ارقام $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$ اعداد 5 رقمی یا 6 رقمی بسازیم.

توجه کنید که: کل ارقام 6 تا با 3 بار تکرار 2 است. یعنی 4 رقم متمایز $(4,3,2,1)$ با سه بار تکرار 2.

یادآوری:

1) جایگشت n شیء به‌طوری‌که n_1 تای آن شبیه هم، n_2 تای آن شبیه هم، ...، n_k تای آن شبیه هم باشد عبارت است از: $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$

2) حرف اضافه «یا» بین دو پیشامد یعنی اجتماع دو پیشامد.

حال باتوجه به یادآوری (1) تعداد اعداد 6 رقمی با این ارقام عبارت است از جایگشت 6 رقم که 3 تای آن شبیه به هم است. $\frac{6!}{3!} = 120$: تعداد اعداد 6 رقمی با این ارقام

برای اعداد 5 رقمی با این 6 رقم دو حالت وجود خواهد داشت. از این 6 رقم می‌خواهیم 5 رقم انتخاب کنیم.

حالت 1) 3 رقم از 5 رقم $(1, 3, 4)$ باشند و 2 رقم دیگر 2 باشند. که تعداد حالات آن باتوجه به یادآوری (1) عبارت است از جایگشت 5 رقم که 2 تای آن شبیه به هم هستند: $\frac{5!}{2!} = 60$

حالت 2) دو رقم از 5 رقم از $(4,3,1)$ انتخاب شوند $\binom{3}{2}$ و 3 تای دیگر 2 باشند. که تعداد حالات آن عبارت است از: جایگشت 5 رقم با سه تکرار 2 :

$$\binom{3}{2}\times\frac{5!}{3!}=3\times 20=60$$

کل حالات انتخاب اعداد 6 رقمی یا 5 رقمی با ارقام $(1\,,2\,,2\,,2\,,3\,,4)$ با توجه به یادآوری (2) عبارتند از:

$$\underbrace{120}_{\text{6 رقمی}}+\underbrace{60+60}_{\text{5 رقمی}}=240$$

توجه کنید اعداد 5 رقمی و 6 رقمی هیچ وجه اشتراکی با هم ندارند بنابراین اجتماع این دو پیشامد تنها جمعشان خواهد بود.

روابط احتمالاتی

9 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$\begin{cases} P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.59-0.21=0.38 \\ P(A)=0.59\ ,\ P(A\cap B)=0.21 \end{cases}$$

10 ـ گزینه 3 صحیح است.

$$\begin{cases} P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)\right)=1-a-b \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \xrightarrow{\text{B , A ناسازگار}}\ P(A)+P(B) \\ \text{ناسازگار}\ B\,,A\ \rightarrow\ P(A\cap B)=0 \\ P(A)=a\ ,\ P(B)=b \end{cases}$$

یادآوری: قانون دمورگان $P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A'_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)'$

11 ـ گزینه 3 صحیح است.

A : فوتبال $\rightarrow P(A)=0.5$

B : بسکتبال $\rightarrow P(B)=0.4$

$A\cap B$: هم فوتبال و هم بسکتبال $\rightarrow P(A\cap B)=0.3$

P (دانشجویی ورزش نکند) = P (نه فوتبال و نه بستکبال) $=P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-0.6=0.4$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.4-0.3=0.6$$

یادآوری:

1) قانون دمورگان: $P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A'_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)'$

2) می‌دانیم که حرف اضافه «و» بین دو پیشامد یعنی اشتراک آن دو:

هم فوتبال و هم بسکتبال $\to A \cap B$

نه فوتبال و نه بسکتبال $\to A' \cap B'$

12ـ گزینه 1 صحیح است.

$$P\,(\text{حداقل یک شیر}) = 1 - P\,(\text{همه خط}) = 1 - \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

13ـ گزینه 4 صحیح است.

$$P(\text{فقط یک نفر}) = P(A\Delta B) = P(A-B) + P(B-A) = P(B \cup A) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

دقت کنید که بیشتر از 10 سال کار کردن A و B مستقل از هم است.

احتمال

14ـ گزینه 2 صحیح است.

دو حالت وجود دارد یا آن مقدار از میانگین بیشتر است یا کمتر بنابراین احتمال هر کدام برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

$$P(x < \mu) = P(x > \mu) = \frac{1}{2}$$

15ـ گزینه 1 صحیح است.

$$P\,(\text{کار کردن سیستم}) = P\,(\text{حداقل یکی کار کند}) = 1 - P\,(\text{هیچ‌کدام کار نکند}) = 1 - 0.2\times 0.2 = 0.96$$

16ـ گزینه 3 صحیح است.

$$P\ (\text{پسر}) = P\ (\text{دختر}) = \frac{1}{2}$$

$$P\ (\text{حداقل یک پسر}) = 1 - P\ (\text{هیچ پسر}) = 1 - P\ (\text{همه دختر}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

17ـ گزینه 1 صحیح است.

یادآوری: تعداد حالات ممکن پرتاب k تاس برابر 6^k است.

در این سؤال $k = 2$ تاس پرتاب شده است بنابراین $6^2 = 36$ حالت وجود خواهد داشت. حال به بررسی حالات مساعد می‌پردازیم:

می‌خواهیم عدد تاس اول کوچکتر از عدد تاس دوم باشد. حالات زیر می‌تواند باشد.

$$A:\begin{cases}(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\\(2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)\\(3,4)\ (3,5)\ (3,6)\\(4,5)\ (4,6)\\(5,6)\end{cases}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{36}=0.42$$

18ـ گزینه 3 صحیح است.

تعداد کل حالات یک عدد سه رقمی از میان ارقام 0 تا 9 عبارت است از:

$$n(S)=\underset{9}{\boxed{\text{غیر از } 0}}\ *\ \underset{10}{\boxed{}}\ *\ \underset{10}{\boxed{}}\ *\ =900$$

چون هیچ صحبتی از غیر تکراری بودن ارقام نشده است به‌طور پیش‌فرض ما تکرار را مجاز می‌دانیم.

دقت کنید که فقط رقم سمت چپ (هزارگان) صفر نمی‌تواند باشد چون عدد، دیگر عدد سه رقمی نخواهد بود. در دو خانه دیگر (یکان، دهگان) نیز هر 10 رقم می‌توانند بنشینند.

حال به بررسی حالات مساعد می‌پردازیم. می‌خواهیم حداقل یکی از ارقام 1 باشد. بهتر است از حالت مکمل آن استفاده کنیم یعنی تعداد حالاتی که رقم یک در آن نباشد را حساب کرده و از کل حالات کم کنیم.

$$\text{هیچ رقم یک}=\underset{8}{\boxed{\text{غیر از } 1\,,\,0}}\ *\ \underset{9}{\boxed{\text{غیر از } 1}}\ *\ \underset{9}{\boxed{\text{غیر از } 1}}\ *\ =648$$

$$P\left(\text{حداقل یکی از ارقام } 1\right)=1-P\left(\text{هیچ‌کدام } 1 \text{ نباشد}\right)=1-\frac{648}{900}=\frac{252}{900}=0.28$$

یا $\text{حداقل یک رقم یک}=\text{کل حالات}-\text{هیچ رقم یک}=900-648=252$

$$P\left(\text{حداقل یکی از ارقام } 1\right)=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}}=\frac{252}{900}=0.28$$

نکته: هرگاه در صورت سؤال احتمال «**حداقل یکی**» خواسته شد؛ بهتر است از حالت مکمل آن یعنی $\left(1-P\left(\text{هیچ}\right)\right)$ استفاده کرد. چون در غیر این‌صورت باید تک‌تک حالات را محاسبه و با هم جمع نمود. مثلاً در این سؤال «یک رقم یک باشد + دو رقم یک باشد + هر سه یک باشد»

احتمال (با جایگذاری و بدون جایگذاری)

19 ــ گزینه 1 صحیح است.

در این سؤال از میان 10 فارغ‌التحصیل 6 نفر شاغل و 4 نفر بیکار هستند، 7 نفر از 10 نفر انتخاب شده است $\binom{10}{7}$ حال می‌خواهیم 2 نفرشان از بین 4 نفر بیکار باشند تا بشود آنها را به کار دعوت کرد $\binom{4}{2}$ بنابراین حتماً 5 نفر دیگر از بین 6 نفر شاغل خواهند بود. $\binom{6}{5}$

$$P(\text{از 7 نفر دو نفر بیکار})=\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{5}}{\binom{10}{7}}=\frac{36}{120}=0.3=\%30$$

20 ــ گزینه 3 صحیح است.

در این سؤال 7 واحد از 10 واحد برگشتی به‌طور تصادفی انتخاب و بازرسی می‌شوند $\binom{10}{7}$

در یک روز از 10 واحد برگشتی 6 واحد معیوب و 4 واحد سالم است. می‌خواهیم در این روز از 7 واحد انتخابی 3 واحد آن از 6 واحد معیوب باشد $\binom{6}{3}$ و 4 واحد دیگر از 4 واحد سالم باشد $\binom{4}{4}$. بنابراین:

$$P(A)=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}}=\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{4}}{\binom{10}{7}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

21 ــ گزینه 1 صحیح است.

توجه:

1) منظور از کلمهٔ کالای همگن همان نامتمایز یا مشابه بودن کالاهاست.

2) انتخاب بدون جایگذاری است اما ترتیب در انتخاب مهم است بنابراین بهتر است تک‌تک، حالات را بررسی کنیم.

از 12 کالا 4 عدد معیوب و 8 عدد سالم اند. حال 3 کالا را یکی بعد از دیگری یعنی به روش بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. می‌خواهیم اولی و دومی سالم و سومی معیوب باشد.

$$P(\text{اولی سالم، دومی سالم، سومی معیوب}) = P(\text{اولی سالم}) * P(\text{دومی سالم}) * P(\text{سومی معیوب}) = \frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{28}{165}$$

دقت کنید چون انتخاب بدون جایگذاری است. انتخاب یک کالای سالم در دفعه اول با احتمال $\frac{8}{12}$ است

اما برای دفعه دوم یک کالای سالم خارج شده و در جعبه 7 کالای سالم از 11 کالای باقیمانده موجود است پس با احتمال $\frac{7}{11}$ کالا سالم خواهد بود و در دفعه سوم نیز چون 2 کالای سالم در دفعات قبلی از جعبه خارج شده است بنابراین 6 کالای سالم و 4کالای معیوب از 10 کالای باقیمانده موجود است که احتمال معیوب خارج شدن در دفعه سوم برابر $\frac{4}{10}$ است.

22 ـ **گزینه 2 صحیح است.**

کلمه ORIGIN شامل 6 حرف است که حرف I در آن 2 بار تکرار شده است. از این 6 حرف می‌خواهیم 2 حرف را به تصادف انتخاب کنیم (بدون جایگذاری)$\binom{6}{2}$ حال از بین این 2 حرف انتخاب شده می‌خواهیم حداقل یکی از آنها I باشد: یعنی یا یکی از آنها I و دیگری از بین 4 حرف دیگر باشد و یا هر دو I انتخاب شوند.

راه حل اول:

$$n(S)=\binom{6}{2}=15$$

$$n(A)=\text{I حداقل یک}=\text{I یک}+\text{I هر دو}=\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{2}{2}\binom{4}{0}=8+1=9$$

$$P(\text{I حداقل یک})=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

راه حل دوم:

$$n(A')=\text{I هیچ}=\binom{4}{2}=6$$

$$P(\text{I حداقل یک})=1-P(\text{I هیچ})=1-\frac{n(A')}{n(S)}=1-\frac{6}{15}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

23 ـ **گزینه 3 صحیح است.**

توجه کنید چون در این سؤال ترتیب خارج شدن توپ‌ها مهم است باید به صورت تک‌تک حالات را بررسی کنیم و دیگر نمی‌توان از ترکیب استفاده کرد.

$$P(\text{توپ دوم سفید})=P(\text{اولی سفید})*P(\text{دومی سفید})+P(\text{اولی سیاه})*P(\text{دومی سفید})$$

$$=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{44}{11\times12}=\frac{1}{3}$$

چون انتخاب بدون جایگذاری است در هر بار انتخاب یک توپ از جعبه کم خواهد شد. مثلاً وقتی اولین توپ خارج شده با احتمال $\frac{4}{12}$ سفید باشد، برای خارج شدن توپ بعدی 11 توپ در جعبه است که 3تای آن سفید و 8 تای آن سیاه است که احتمال سفید بودن آن $\frac{3}{11}$ خواهد بود. همچنین وقتی اولین توپ خارج

شده با احتمال $\frac{8}{12}$ سیاه باشد، برای خارج شدن توپ بعدی 11 توپ در جعبه است که 4 تای آن سفید و 7 تای آن سیاه است و احتمال سفید بودن آن $\frac{4}{11}$ خواهد بود.

24 ــ گزینه 3 صحیح است.

توجه: هرگاه انتخاب با جایگذاری باشد باید تک‌تک، حالات را بررسی کنیم.

$$P\ (\text{هر دو سفید}) = P\ (\text{اولی سفید}) \times P\ (\text{دومی سفید}) = \frac{20}{50} \times \frac{20}{50} = \frac{4}{25}$$

دقت کنید چون انتخاب باجایگذاری است در هر بار انتخاب همان 20 مهره سفید و 30 مهره سیاه را در جعبه داریم.

25 ــ گزینه 2 صحیح است.

دقت کنید در این سؤال 6 زوج داریم (12 نفر) از بین این 12 نفر 2 نفر را انتخاب کرده‌ایم $\binom{12}{2}$، می‌خواهیم این دو نفر یک زوج از 6 زوج باشند. $\binom{6}{1}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

احتمال شرطی

26 ــ گزینه 4 صحیح است.

$$\begin{array}{|cc|} 5 & 7 \\ \text{قرمز} & \text{سفید} \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{سفید}]{\text{مهرهٔ خارج شده}} \begin{array}{|cc|} 9 & 5 \\ \text{سفید} & \text{قرمز} \\ \hline \end{array} \rightarrow P\ (\text{قرمز}) = \frac{4}{9+5} = \frac{5}{14}$$

27 ــ گزینه 2 صحیح است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

برای به‌دست آوردن $P(A \cap B)$ دو راه وجود دارد:

راه حل اول:

یادآوری(1): هرگاه $P(A \mid B) = P(A)$ و یا $P(B \mid A) = P(B)$ باشد، B , A مستقل‌اند در این سؤال نیز این اتفاق افتاده است، یعنی:

$$P(A \mid B) = P(A) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad B , A \text{ مستقل‌اند.}$$

یادآوری(2): هرگاه B , A مستقل باشند :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$$

راه حل دوم:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$$

28 **ـ گزینه 2 صحیح است.**

توجه: هرگاه در صورت سؤال اطلاعات اضافی داده شد، احتمال شرطی است. در این سؤال «فرد انتخاب شده، مرد است» اطلاعات اضافی است بنابراین مسئله احتمال شرطی است و داریم:

رشته \ جنس	مرد	زن	جمع
فیزیک	20	30	50
ریاضی	d	60	70
جمع	d	90	120

$$P(\text{مرد بودن} \mid \text{رشته ریاضی}) = \frac{P(\text{مرد و رشته ریاضی})}{P(\text{مرد بودن})} = \frac{\frac{10}{120}}{\frac{30}{120}} = \frac{1}{3}$$

29 **ـ گزینه 1 صحیح است.**

توجه: هرگاه اطلاعات اضافی در صورت سؤال داده شود، احتمال شرطی است. در این سؤال نیز «مشکی نبوده» اطلاعات اضافی است، بنابراین احتمال شرطی خواهد بود.

$$P(\text{قرمز} \mid \text{مشکی نبودن}) = P(\text{قرمز} \mid \text{سبز و قرمز بودن}) = \frac{P(\text{قرمز} \cap \text{قرمز و سبز})}{P(\text{قرمز و سبز})} = \frac{P(\text{قرمز})}{P(\text{قرمز و سبز})} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

راه تستی محاسبه احتمال شرطی این است که فضای نمونه را به فضای شرط شده در مسئله محدود کنیم و سپس احتمال خواسته شده را از فضای نمونه محدود شده به‌دست آوریم. مثلاً در این سؤال:

کل خودکارهای درون جعبه 12 عدد است (3 سبز + 4 قرمز + 5 مشکی) وقتی یکی خودکار خارج شده و مشکی نبوده یعنی هیچ‌کدام از 5 خودکار مشکی انتخاب نشده است. بنابراین از بین 7 خودکار سبز و قرمز انتخاب شده است. از این 7 خودکار 3 سبز و 4 قرمز داریم که احتمال قرمز بودن خودکار خارج شده برابر $\frac{4}{7}$ است.

$$\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات شرط شده}} = \frac{\text{قرمز}}{\text{قرمز و سبز}} = \frac{4}{7}$$

30 **ـ گزینه 4 صحیح است.**

سیاه	سفید
2	2

$$P(\text{اقلاً یکی سفید}|\text{هر دو سفید}) = \frac{P(\text{هر دو سفید} \cap \text{اقلاً یکی سفید})}{P(\text{اقلاً یکی سفید})} = \frac{\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}}{\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

31 ـ گزینه 4 صحیح است.

$$\begin{cases} P(\text{زوج}) = 3P(\text{فرد}) \\ P(\text{زوج}) + P(\text{فرد}) = 1 \end{cases} \rightarrow P(\text{زوج}) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(\text{فرد}) = \frac{1}{4}$$

بنابراین چون در تاس 3 عدد زوج و 3 عدد فرد داریم، احتمال هر کدام بر 3 تقسم خواهد شد :

عدد تاس	1	2	3	4	5	6
احتمال	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$

$$P(\text{بزرگتر از } 3 \mid \text{مربع کامل}) = \frac{P(\text{بزرگتر از } 3 \text{ و مربع کامل})}{P(\text{بزرگتر از } 3)} = \frac{P\{4\}}{P\{4,5,6\}} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

احتمال متوسط

32 ـ گزینه 1 صحیح است.

5	7
قرمز	سفید

$$P(\text{مهره دوم قرمز}) = P(\text{دومی قرمز} \mid \text{اولی قرمز})\, P(\text{اولی قرمز}) + P(\text{دومی قرمز}|\text{اولی سفید})\, P(\text{اولی سفید})$$

$$= \frac{6}{13}\times\frac{5}{12} + \frac{5}{14}\times\frac{7}{12} = \frac{30}{13\times12} + \frac{35}{14\times12} = \frac{420+455}{13\times14\times12} = \frac{875}{13\times14\times12} = \frac{125}{312}$$

33 ـ گزینه 1 صحیح است.

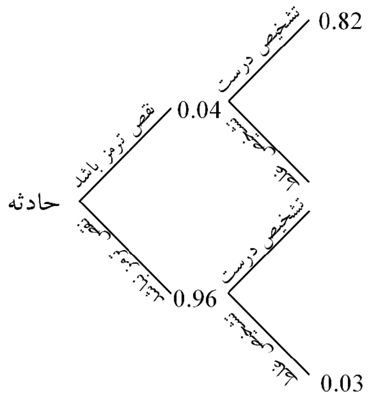
$$P(\text{دو مهره هم‌رنگ نباشند}) = P(\text{اولی سفید و دومی قرمز}) + P(\text{اولی قرمز و دومی سفید})$$

$$= P(\text{دومی قرمز} \mid \text{اولی سفید})\ P(\text{اولی سفید}) + P(\text{دومی سفید} \mid \text{اولی قرمز})\ P(\text{اولی قرمز})$$

$$= \frac{5}{14}\times\frac{7}{12}+\frac{7}{13}\times\frac{5}{12}=\frac{35}{14\times12}+\frac{35}{13\times12}=\frac{455+490}{13\times14\times12}=\frac{945}{13\times14\times12}=\frac{135}{13\times2\times12}=\frac{45}{104}$$

قضیه بیز

34 ـ گزینه 2 صحیح است.



A : حادثه واقعاً ناشی از نقص ترمز است

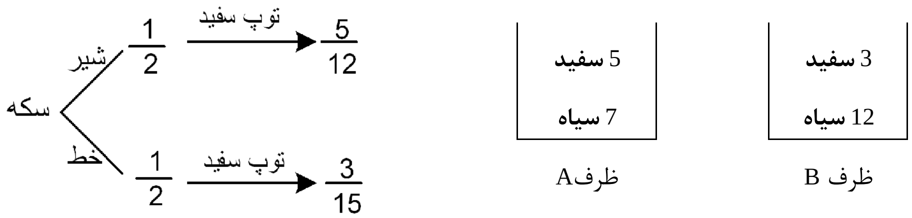
E :حادثه ناشی از نقص ترمز تشخیص داده شود.

با توجه به قضیه بیز داریم:

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|A')P(A')}$$

$$=\frac{0.04\times 0.82}{0.04\times 0.82+0.03\times 0.96}=\frac{328}{328+288}=0.5325$$

35 ـ گزینه 4 صحیح است.



T: خط ، H: شیر ، W: سفید

با توجه به قضیه بیز داریم:

$$P(T|w)=\frac{P(w|T)P(T)}{P(w|H)P(H)+P(w|T)P(T)}$$

$$=\frac{\frac{3}{15}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{15}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{24}+\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{50+24}{240}}=\frac{24}{74}=\frac{12}{37}$$

خودآزمایی

تابع احتمال (گسسته)

1 ـ توزیع احتمال متغیر x به صورت جدول زیر است. احتمال این که حداقل x برابر 2 باشد کدام است؟

x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{4}$

1) $\frac{1}{8}$ 2) $\frac{5}{8}$ 3) $\frac{8}{11}$ 4) $\frac{11}{16}$

تابع چگالی (پیوسته)

2 ـ هر گاه x یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}k$ وقتی $0<x<1$ و در جای دیگر برابر صفر باشد، مقدار k چقدر است؟

1) 1 2) 2 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{3}{2}$

3 ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است. مقدار $P\left(\frac{9}{4}\le x\le 4\right)$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{x}} & 1\le x\le 9\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{3}{8}$

4 ـ اگر متغیر پیوسته X تنها مقادیر غیرمنفی را با تابع چگالی احتمال $f(x)=e^{-x}$ اختیار کند، احتمال این‌که X مقداری بین 1 تا 3 را بگیرد، برابر است با:

1) 0.2325 2) 0.3181 3) 0.1353 4) 0.4650

تابع توزیع تجمعی

5 ـ اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع تجمعی زیر باشد مقدار $P(1\le X<3)$ کدام است؟

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{2} & 1\le x<2\\ \frac{5}{6} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{5}{6}$

امید ریاضی (گسسته)

6ـ در پرتاب دو سکه سالم، رو شدن یک H دارای یک امتیاز و رو شدن دو H دارای دو امتیاز بوده؛ رو نشدن H «چند امتیاز منفی» داشته باشد، تا امید ریاضی این بازی برابر صفر گردد؟

1) 3　2) 4　3) 5　4) 6

7ـ جدول توزیع احتمال فروش نوعی کالا توسط یک شخص در روز با سود ناویژه هر واحد معادل 5000 تومان به صورت

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.4	0.3	0.2

و کل هزینه‌های فروش روزانه برابر مبلغ ثابت 2000 تومان بوده، امید ریاضی سود خالص فروش هر روز «چند تومان» است؟

1) 8000　2) 7000　3) 6000　4) 5000

8ـ برای توزیع احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر:

x	1	2	3	4
احتمال	0.15	b	0.25	c

امید ریاضی محاسبه شده برابر 2.7 بوده؛ بین c , b «چه رابطه‌ای» برقرار است؟

1) $b \neq c$　2) $b < c$　3) $b = c$　4) $b > c$

9ـ در یک بازی سرگرمی تاسی (مکعب شش وجهی منتظم) را می‌ریزیم و معادل عددی که تاس نشان می‌دهد با واحد تومان جایزه می‌گیریم. برای پرتاب هر بار تاس چند تومان باید بپردازیم تا بازی عادلانه باشد؟ (جمع جبری امید ریاضی برد و باخت مساوی صفر شود.)

1) 3.5　2) 3　3) 6　4) 7

امید ریاضی (پیوسته)

10ـ اگر x با توزیع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{1}{12} : & 0 \le x \le 3 \end{cases}$ متغیر تصادفی پیوسته باشد، امید ریاضی x کدام است؟

1) $\frac{9}{8}$　2) $\frac{3}{2}$　3) $\frac{15}{8}$　4) 1

خواص امید ریاضی

11ـ اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال به صورت زیر باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی $Y = 5X - 2$ کدام است؟

X	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.2	0.7

1) 6　2) 5　3) 5.6　4) 6.7

واریانس

12ـ هرگاه x یک متغیر تصادفی باشد که در آن $P(x = c) = 1$، c مقدار ثابت. آن‌گاه E(x) و Var (x) به ترتیب کدام است؟

1) $0 , 1$ 2) $0 , C$ 3) $C , 1$ 4) C^2 , C

13ـ فرض کنید x، یک متغیر تصادفی باشد که مقادیر $2 , 2^2 , 2^3 , \ldots , 2^k , \ldots$ را با احتمال $P(x_k) = P(2^k) = \frac{1}{2^k}$، اختیار نماید، در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های ذیل درست است؟

1) میانگین X، برابر با 1 است. 2) واریانس X، برابر با 1 است.
3) میانگین قابل محاسبه نیست. 4) انحراف معیار برابر با $\sqrt{2}$ است.

14ـ انحراف معیار توزیع احتمال زیر برابر است با:

x	0	1	2	3
$f_x(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

1) 0.8 2) 0.9 3) 1 4) 1.5

خواص واریانس

15ـ اگر $E(x) = 3.4$, $E(x^2) = 12$ باشد. $V\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$ چقدر است؟

1) 0.11 2) 0.12 3) 0.13 4) 0.16

تابع چگالی توأم (x , y)

16ـ تابع احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید: احتمالات حاشیه‌ای Y کدام است؟

x \ y	0	10
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

1)

y	0	10
f (y)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

2)

Y	0	10
f (y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3)

y	0	10
f (y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4) هیچ‌کدام

17ـ در سؤال قبل، $P(Y > X)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

18ـ تابع $f(x, y) = ax^2 y$ که در آن $0 \le x < 1$ و $0 \le y < 1$ و در سایر نقاط $f(x, y) = 0$ به ازای کدام مقدار a یک تابع چگالی است؟

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

تابع احتمال شرطی

19ـ این تابع احتمال توأم را درنظر بگیرید:

x \ y	0	10
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$P(Y = 10 / X = 2)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

محاسبه کواریانس

20ـ این تابع احتمال توأم را درنظر بگیرید:

x \ y	0	10
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(XY)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

1) $\frac{3}{10}$ 2) صفر 3) 10 4) $-\frac{10}{3}$

21ـ در سؤال قبل، کواریانس با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

1) $\frac{3}{10}$ 2) $\frac{10}{3}$ 3) $-\frac{10}{3}$ 4) صفر

22 ـ در تابع احتمال زیر، کدام‌یک از این روابط زیر صادق است؟

x \ y	0	10
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

1) $E(X+Y)=E(X)$
2) $E(X+Y)=E(Y)$
3) $E(X+Y)=E(XY)$
4) $E(X+Y)=E(X)-E(Y)$

23 ـ تابع احتمال توأم در متغیر تصادفی x و y به صورت جدول زیر است. کواریانس بین دو متغیر کدام است؟

y \ x	1	2	3
0	0.2	0.1	0.3
2	0.15	0.25	0

1) 0.48
2) 0.52
3) -0.26
4) -0.34

خواص کواریانس

24 ـ اگر $V(X)=\frac{1}{2}$ و $V(Y)=\frac{2}{3}$ و $V(X+Y)=\frac{5}{6}$ باشد، آنگاه کدام عبارت صحیح است؟

1) $Cov(X,Y)=\frac{1}{3}$
2) $Cov(X,Y)=\frac{1}{2}$
3) $Cov(X,Y)=-\frac{1}{6}$
4) $Cov(X,Y)=-\frac{1}{4}$

25 ـ این تابع احتمال توأم را درنظر بگیرید:

x \ y	0	10
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

واریانس X و واریانس Y به ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟

1) 5 , 0
2) 25 , 0
3) 5 , 4
4) 25 , 4

26 ـ در سؤال قبل $V(X-Y)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

1) 29
2) 21
3) $\frac{77}{3}$
4) $\frac{107}{3}$

استقلال (متغیرهای تصادفی)

27ـ کدام یک از عبارات زیر غلط است؟

1) اگر دو متغیر تصادفی X,Y مستقل باشند، آن‌گاه X,Y ناهمبسته هستند.

2) اگر دو پیشامد A, B مستقل باشند آن‌گاه A, B' نیز مستقلند.

3) اگر A,B دو پیشامد جدا از هم باشند آن‌گاه مستقلند .

4) اگر X,Y ناهمبسته بوده و متوسط X صفر باشد آن‌گاه X,Y بر هم عمودند.

28ـ اگر $r = 0$ باشد، می‌توان گفت دو متغیر ....

1) همبستگی باهم ندارند. 2) همبستگی آن‌ها ضعیف است.

3) همبستگی خطی با هم ندارند. 4) همبستگی آن‌ها غیرخطی است.

ضریب همبستگی

29ـ اگر معادله خط رگرسیون y نسبت به x به صورت $y = -2x + b$ و $SS_y = 4SS_x$ باشد، ضریب همبستگی بین x و y کدام است؟

1) 1 2) 0.9 3) -1 4) -0.9

30ـ اگر X_3, X_2, X_1 متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و واریانس یک باشند، دو به دو ناهمبسته باشند و $U = X_1 + X_2 + X_3$ و $V = X_1$ ضریب همبستگی بین V , U چقدر است؟

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

31ـ اگر در متغیرهای تصادفی $U=X+Y$ و $V=aX-Y$ که $\sigma_x^2=\sigma_y^2=1$ بوده، ضریب همبستگی Y, X برابر 0.8 باشد و V, U ناهمبسته باشند مقدار a برابر است با:

1) 1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) -1

32ـ معادلهٔ خط رگرسیون که باتوجه به نمونه‌ای 8 تایی برآورد شده به صورت $\hat{y} = -5 + 2x$ است. کدام‌یک از این موارد نمی‌تواند ضریب همبستگی آن باشد؟

1) 0.45 2) -0.90 3) 0.95 4) 0.85

33 ـ ضریب همبستگی داده‌هایی زیر با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

x	5	7	9
y	20	15	13

1) $-\frac{7}{2\sqrt{10}}$ 2) $-\frac{7}{2\sqrt{13}}$ 3) $\frac{7}{2\sqrt{10}}$ 4) $\frac{7}{2\sqrt{13}}$

ضرییب تعیین

34 ـ اگر ضریب همبستگی بین دو متغیری 0.6 و دو متغیر دیگر 0.3 باشد، می‌توان گفت همبستگی دو متغیر اول «چند برابر قوی‌تر» از دو متغیر دوم است؟

1) دو برابر 2) سه برابر 3) چهار برابر 4) نه برابر

رگرسیون

35 ـ از یک نمونه‌گیری اطلاعات زیر در دست است:

$$r_{xy} = 0.9 \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{2} \quad , \quad \sigma_y = \sqrt{8} \quad , \quad \bar{y} = 6 \quad , \quad \bar{x} = 3$$

معادله رگرسیون کدام است؟

1) $\hat{y} = 0.6 + 1.8x$ 2) $\hat{y} = 1.2 + 1.8x$

3) $\hat{y} = -0.6 + 1.8x$ 4) $\hat{y} = 1.2 - 1.8x$

36 ـ در یک آزمایش از 10 زوج مقادیر x و y ، رابطه‌ی $\sum x_i = \sum y_i = 30$ برقرار و معادله‌ی خطّ رگرسیون بصورتِ $y = -9 + \beta x$ بوده؛ مقدار شیب این خط، برابر چه عددی است؟

1) 4 2) 3 3) -4 4) -3

37 ـ شیب خط رگرسیون با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

x	5	7	9
y	20	15	13

1) - 1.00 2) - 1.75 3) - 2.00 4) - 2.75

38 ـ عرض از مبدأ (a) با کدام گزینه برابر است؟

1) 10.25 2) 18.25 3) 28.25 4) 38.25

پاسخ نامه

برای دریافت پاسخ تشریحی سؤالات به سایت **www.tourani.ir** مراجعه کنید.

	1	2	3	4
1				■
2	■			
3		■		
4		■		
5				■
6		■		
7			■	
8			■	
9	■			
10			■	
11	■			
12		■		
13			■	
14		■		
15	■			
16			■	
17				■
18			■	
19		■		
20				■
21			■	
22		■		
23			■	
24			■	

	1	2	3	4
25				■
26				■
27			■	
28			■	
29			■	
30			■	
31	■			
32		■		
33		■		
34			■	
35	■			
36	■			
37		■		
38			■	

تابع احتمال (گسسته)

1ـ گزینه 4 صحیح است.

راه حل اول: ابتدا مقدار احتمال a را باتوجه به اینکه مجموع احتمال‌ها در تابع احتمال گسسته برابر یک است، به‌دست می‌آوریم.

X	0	1	2	3	
P_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$a=\frac{7}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\sum P=1$

$$\sum p=1 \rightarrow \frac{1}{16}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1 \rightarrow a=\frac{7}{16}$$

$$P(\text{حداقل x برابر 2})=P(x \ge 2)=P(x=2)+P(x=3)=\frac{7}{16}+\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$$

راه حل دوم:

بدون به‌دست آوردن مقدار احتمال a هم می‌توانستیم از طریق مکمل احتمال آن را حل کنیم.

$$P(x \ge 2)=1-P(x<2)=1-P(x=1)-P(x=0)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

تابع چگالی (پیوسته)

2ـ گزینه 1 صحیح است.

یادآوری: در تابع چگالی پیوسته، مقدار انتگرال روی کل بازه برابر یک است. $\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} f(x)\,dx=1$

$$\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}k\right)dx=1 \rightarrow \left[\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}kx\right]_0^1=1 \rightarrow \frac{1}{2}+\frac{k}{2}=1 \rightarrow \boxed{k=1}$$

3ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری: احتمال در فاصله برابر انتگرال در فاصله است. $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx$

$$P\left(\frac{9}{4}\le x\le 4\right)=\int_{\frac{9}{4}}^{4}\frac{1}{4\sqrt{x}}dx=\int_{\frac{9}{4}}^{4}\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{4}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{9}{4}}^{4}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x}\right]_{\frac{9}{4}}^{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{4}-\sqrt{\frac{9}{4}}\right]=\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

4 ـ گزینه 2 صحیح است.

یادآوری: احتمال در فاصله برابر انتگرال در فاصله است. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$

$$P(1 < x < 3) = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_1^3 = -e^{-3} - \left(-e^{-1}\right) = e^{-1} - e^{-3}$$

همواره به‌طور تقریبی $e^{-1} = 0.4$ در نظر بگیرید، بنابراین داریم:

$$P(1 < x < 3) = e^{-1} - e^{-3} = 0.4 - (0.4)^3 = 0.4 - 0.064 = 0.336$$

نزدیکترین گزینه، گزینه 2 است.

چون مقدار حقیقی $e^{-1} = 0.36$ است ولی ما آن را کمی بیشتر $\left(e^{-1} = 0.4\right)$ در نظر می‌گیریم بنابراین جواب حاصل نیز در بین گزینه‌ها حتماً از جواب ما کمی کمتر است.

تابع توزیع تجمعی

5 ـ گزینه 4 صحیح است.

یادآوری:

$$P(a \le x < b) = P(x = a) + P(a < x < b) = F\left(a^+\right) - F\left(a^-\right) + F\left(b^-\right) - F\left(a^+\right)$$

$$P(1 \le x < 3) = P(x = 1) + P(1 < x < 3) = F\left(1^+\right) - F\left(1^-\right) + F\left(3^-\right) - F\left(1^+\right) = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

امید ریاضی (گسسته)

6 ـ گزینه 2 صحیح است.

حالات ممکن پرتاب دو سکه: $\left\{ \underbrace{(H,H)}_{\text{هر دو شیر}} , \underbrace{(H,T),(T,H)}_{\text{یک شیر و یک خط}} , \underbrace{(T,T)}_{\text{دو خط}} \right\} \to n(S) = 4$

احتمال آمدن حالات مختلف: $\left\{ \frac{1}{4} , \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} , \frac{1}{4} \right\}$

حال می‌توان باتوجه به امتیازها در حالات مختلف و احتمال آمدن در حالات مختلف جدول توزیع احتمال آن را رسم کرد.

حالات	دو شیر	یک شیر	رو نشدن شیر
امتیاز: x	2	1	- a
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(x)=\sum xP(x)=2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+(-a)\times\frac{1}{4}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{a}{4}=0\rightarrow \boxed{a=4}$$

بنابراین اگر به ازای نیامدن شیر و یا آمدن 2 خط در پرتاب 2 سکه 4 امتیاز منفی تعلق گیرد، امید ریاضی این بازی برابر صفر خواهد شد.

در اصطلاح می‌گویند بازی منصفانه (عادلانه) است هرگاه امیدریاضی امتیاز برابر صفر باشد.

7 ـ گزینه 3 صحیح است.

باتوجه به اینکه به ازای هر واحد فروش سودی معادل 5000 تومان تعلق می‌گیرد، جدول را به‌شکل زیر تغییر می‌دهیم و پس از محاسبه امید سود حاصل شده هزینه‌های ثابت را از آن کم می‌کنیم تا سود خالص به‌دست آید.

سود: $x\times 5000$	0×5000	1×5000	2×5000	3×5000	
احتمال	0.1	0.4	0.3	0.2	$\sum p=1$

$$E(x)=\sum xP(x)=5000(0.1\times 0+0.4\times 1+0.3\times 2+0.2\times 3)=5000\times 1.6=8000$$

$$\text{سود خالص}=E(x)-\text{هزینه‌ها}=8000-2000=6000$$

8 ـ گزینه 3 صحیح است.

یادآوری: در توابع احتمال گسسته مجموع احتمال‌ها برابر یک است. $1)\ \sum p_i=1$

و همچنین مقدار امید ریاضی از طریق رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید. $2)\ E(x)=\sum x_i p_i$

طبق دو رابطه بالا برای این سؤال داریم :

x	1	2	3	4	
p	0.15	b	0.25	c	$\sum p=1$

$$1)\ \sum p=1\rightarrow 0.15+b+0.25+c=1\rightarrow \boxed{b+c=0.6}\ (I)$$

$$2)\ E(x)=\sum x.p\rightarrow 1\times 0.15+2\times b+3\times 0.25+4\times c=2.7\rightarrow \boxed{2b+4c=1.8}\ (II)$$

$$\begin{cases} I:\ \ b+c=0.6 \\ II:\ \ 2b+4c=1.8 \end{cases} \xrightarrow[\text{و با رابطه دوم جمع شود}]{\text{رابطه اول در } -2 \text{ ضرب}} 2c=0.6\rightarrow c=0.3$$

حال با داشتن مقدار c از یکی از دو رابطه مقدار b به‌دست می‌آید.

$$b+c=0.6 \xrightarrow{c=0.3} b=0.3\rightarrow \boxed{b=c=0.3}$$

9ـ گزینه 1 صحیح است.

در صورتی‌که به اندازه متوسط پول‌های برده در بازی، برای هر بار بازی کردن هزینه بپردازیم، بازی عادلانه خواهد بود. در حقیقت امید ریاضی برد و باخت با هم برابر شود.

عدد تاس:	X	1	2	3	4	5	6
احتمال	$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=\sum_{X=1}^{6} x\,P(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{1}{6}.\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}.\frac{6\times7}{2}=3.5$$

امید ریاضی (پیوسته)

10ـ گزینه 3 صحیح است.

یادآوری:اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد:

$$E(x)=\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} x\,.\,f(x)\,dx$$

$$E(X)=\int_0^3 x.f(x)dx=\int_0^3 x.\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{12}\right)dx=\left[\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{24}x^2\right]_0^3=\frac{27}{18}+\frac{9}{24}=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$$

خواص امید ریاضی

11ـ گزینه 1 صحیح است.

X	0	1	2	
$f(x)$	0.1	0.2	0.7	$\sum f(x)=1$

$$E(X)=\sum x\,f(X)=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.7=1.6$$

یادآوری: خواص امید ریاضی :

$$E(ax\pm b)=aE(x)\pm b$$

$$E(Y)=E(5X-2)=5E(X)-2=5\times1.6-2=8-2=6$$

واریانس

12ـ گزینه 2 صحیح است.

باتوجه به اینکه مقدار احتمال در نقطه ثابت C داده شده بنابراین X متغیر تصادفی گسسته است و بهتر است جدول احتمال آن را بکشیم.

X	C	
$P(x)$	1	$\sum P(x)=1$

$$\begin{cases} Var(x)=E\left(x^2\right)-E(x)^2=C^2-C^2=0 \;\text{ü} \\ E(x)=\sum xP(x)=C\times 1=C \;\text{ü} \\ E\left(x^2\right)=\sum x^2P(x)=C^2\times 1=C^2 \end{cases}$$

توجه کنید که چون در نقطه C مقدار احتمال برابر یک است تابع احتمال x فقط شامل همین یک نقطه است و در نقطه‌های دیگر مقدار احتمالش برابر صفر خواهد بود.

13ـ گزینه 3 صحیح است.

بهتر است برای واضح شدن تابع احتمال جدول زیر را رسم کنیم.

x	2	2^2	...	2^k	...	
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$		$\frac{1}{2^k}$	...	$\sum P(x)=1$

$$\begin{aligned} E(x)=\sum xP(x) &= 2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{2^2}+2^3\times\frac{1}{2^3}+\ldots+2^k\frac{1}{2^k}+\ldots \\ &= 1+1+1+\cdots+1+\cdots \end{aligned}$$

دقت کنید که چون تا بی‌نهایت مقادیر x و مقادیر P(x) ادامه دارد بنابراین در میانگین آن نیز بی‌نهایت 1 با هم جمع می‌شوند و می‌توان گفت میانگین آن ∞ خواهد شد و یا به نوعی قابل محاسبه نیست.

چون میانگین قابل محاسبه نیست بنابراین واریانس و انحراف معیار را نیز نمی‌توان محاسبه کرد. زیرا:

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2$$

نکته: اگر در گزینه‌ها گزینه‌ای بود که گفته بود میانگین x، برابر ∞ است، می‌توانست جواب صحیح باشد.

14ـ گزینه 2 صحیح است.

X	0	1	2	3	
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2	$\sum f(x)=1$

$$\sigma^2 = E\left(x^2\right) - E(x)^2 = 3.7 - (1.7)^2 = 3.7 - 2.89 = 0.81 \rightarrow \boxed{\sigma = 0.9}$$

$$E\left(x^2\right) = \sum x^2 f(x) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.2 = 3.7$$

$$E(x) = \sum x f(x) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 = 1.7$$

خواص واریانس

15ـ گزینه 1 صحیح است.

یادآوری:

$$1)\ V\left(ax + \overset{0}{\cancel{b}}\right) = a^2 V(x)$$

$$2)\ V(x) = E\left(x^2\right) - E(x)^2$$

$$1)\ V\left(-\frac{1}{2}x + \overset{0}{\cancel{3}}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 V(x) = \frac{1}{4} \times 0.44 = 0.11$$

$$2)\ V(x) = E\left(x^2\right) - E(x)^2 = 12 - (3.4)^2 = 12 - 11.56 = 0.44$$

تابع چگالی توأم (X , Y)

16ـ گزینه 3 صحیح است.

X \ Y	0	10	$P(X)$
−2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

بنابراین توابع حاشیه‌ای X و Y عبارت است از:

X	−2	2
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	10
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

17ـ **گزینه 4 صحیح است.**

X \ Y	0	10	$P(X)$
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P(Y>X)=P(Y=0,X=-2)+P(Y=10,X=-2)+P(Y=10,X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

18ـ **گزینه 3 صحیح است.**

یادآوری: برای اینکه تابع دو متغیره $f(x,y)$ یک تابع چگالی احتمال باشد، در صورتی که Y, X دو متغیر تصادفی پیوسته باشند باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\int_{\text{x حدود}}\int_{\text{y حدود}} f(x\,,\,y)\,dy\,dx=\int_{\text{y حدود}}\int_{\text{x حدود}} f(x\,,\,y)\,dx\,dy=1$$

پس در این سؤال داریم:

$$\int_0^1\int_0^1 ax^2y\,dy\,dx=1\ \rightarrow\ a\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2x^2\right]_0^1 dx=1\ \rightarrow\ a\int_0^1\frac{1}{2}x^2\,dx=1$$

$$\rightarrow\ a\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=a\frac{1}{6}=1\ \rightarrow\ \boxed{a=6}$$

دقت کنید در انتگرال دوگانه وقتی حدود انتگرال معین است ابتدا یکی از متغیرها را ثابت در نظر گرفته و نسبت به دیگری انتگرال بگیرید سپس حدودش را جایگذاری کنید حال نسبت به متغیر دیگر دوباره انتگرال بگیرید و حدودش را جایگذاری کنید و یا می‌توان همان ابتدا چون حدود هر دو متغیر معین است نسبت به هر دو انتگرال گرفت و جایگذاری کرد مانند :

$$\int_0^1\int_0^1 ax^2y\,dx\,dy=a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\times\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=a\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=1\ \rightarrow\ a=6$$

تابع احتمال شرطی

19ـ گزینه 2 صحیح است.

X \ Y	0	10	P(X)
−2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P(Y=10 \mid X=2)=\frac{P(Y=10, X=2)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

محاسبه کواریانس

20ـ گزینه 4 صحیح است.

X \ Y	0	10	P(X)
−2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(XY)=\sum xy\,P(X,Y)=(-2)\times 0\times\frac{1}{6}+(-2)\times 10\times\frac{1}{3}+2\times 0\times\frac{1}{3}+2\times 10\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{-20}{3}+\frac{20}{6}=\frac{-20+10}{3}=\frac{-10}{3}$$

21ـ گزینه 3 صحیح است.

X \ Y	0	10	P(X)
−2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X).E(X)=\frac{-10}{3}-0\times 5=\frac{-10}{3}$$

$$E(XY)=\sum xyP(X,Y)=(-2)\times 0\times\frac{1}{6}+(-2)\times 10\times\frac{1}{3}+2\times 0\times\frac{1}{3}+2\times 10\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{-20}{3}+\frac{20}{6}=\frac{-20+10}{3}=-\frac{10}{3}$$

$$E(X)=\sum xP(X)=(-2)\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=-1+1=0$$

تا همین‌جا مسئله حل شده است چرا که با توجه به صفر شدن $E(X)$ دیگر نیازی به محاسبه $E(Y)$ نیست.

$$E(Y)=\sum yP(Y)=0\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}=0+5=5$$

22 ـ گزینه 2 صحیح است.

X \ Y	0	10	P(X)
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(XY)=\sum xyP(X,Y)=(-2)\times 10\times\frac{1}{3}+2\times 10\times\frac{1}{6}=\frac{-10}{3}$$

$$E(X)=\sum xP(X)=-2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=0$$

$$E(Y)=\sum yP(Y)=0\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}=5$$

با توجه به خاصیت امید ریاضی داریم:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0+5=5=E(Y)$$

حال با توجه به گزینه‌ها، تنهاگزینه 2 صحیح است.

23 ـ گزینه 3 صحیح است.

y \ x	1	2	3	f(y)
0	0.2	0.1	0.3	0.6
2	0.15	0.25	0	0.4
f(x)	0.35	0.35	0.3	1

$$\mathrm{Cov}(x,y)=E(xy)-E(x).E(y)=1.3-1.95\times 0.8=1.3-1.56=-0.26$$

$$E(xy)=\sum_x\sum_y xyf(x,y)=+2\times 1\times 0.15+2\times 2\times 0.25=1.3$$

$$E(x) = \sum_x x f(x) = 1\times 0.35 + 2\times 0.35 + 3\times 0.3 = 1.95$$
$$E(y) = \sum_y y f(y) = 0\times 0.6 + 2\times 0.4 = 0.8$$

خواص کواریانس

24ـ گزینه 3 صحیح است.

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$
$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 2Cov(X,Y) \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{3+4}{6} + 2Cov(X,Y)$$
$$\rightarrow 2Cov(X,Y) = \frac{5}{6} - \frac{7}{9} = \frac{-2}{6} \rightarrow 2Cov(X,Y) = -\frac{1}{3} \rightarrow Cov(X,Y) = \frac{-1}{6}$$

25ـ گزینه 4 صحیح است.

X \ Y	0	10	P(X)
−2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 4 - 0^2 = 4$$

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 = 50 - 5^2 = 50 - 25 = 25$$

$$\begin{cases} E\left(X^2\right) = \sum x^2 P(X) = (-2)^2\times\frac{1}{2} + 2^2\times\frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} = 4 \\ E(X) = \sum x P(X) = -2\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E\left(Y^2\right) = \sum y^2 P(Y) = 0^2\times\frac{1}{2} + 10^2\times\frac{1}{2} = 50 \\ E(Y) = \sum y P(Y) = 0\times\frac{1}{2} + 10\times\frac{1}{2} = 5 \end{cases}$$

26 ـ گزینه 4 صحیح است.

X \ Y	0	10	$P(X)$
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)+2(1)(-1)Cov(X,Y)=4+25-2\left(-\frac{10}{3}\right)=29+\frac{20}{3}=\frac{107}{3}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=4-0^2=4$$

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=50-5^2=25$$

$$\begin{cases} E\left(X^2\right)=\sum x^2P(X)=(-2)^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{2}=4 \\ E(X)=\sum xP(X)=(-2)\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E\left(Y^2\right)=\sum y^2P(Y)=0^2\times\frac{1}{2}+10^2\times\frac{1}{2}=50 \\ E(Y)=\sum yP(Y)=0\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}=5 \end{cases}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)=-\frac{10}{3}-0\times5=-\frac{10}{3}$$

$$E(XY)=\sum xyP(X,Y)=-2\times10\times\frac{1}{3}+2\times10\times\frac{1}{6}=-\frac{10}{3}$$

استقلال (متغیرهای تصادفی)

27 ـ گزینه 3 صحیح است.

گزینه 1) اگر Y,X مستقل باشند، آنگاه Y,X ناهمبسته‌اند. اما عکس این عبارت صحیح نیست. **P**

گزینه 2) هرگاه A,B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه $(A',B'),(B,A'),(B',A)$ نیز مستقلند . **P**

گزینه3) اگرA,B دو پیشامد جدا از هم باشند، آنگاه $P(A\cap B)=0$ خواهد بود پسA,Bناسازگار و وابسته اند. ×

گزینه 4) Y , X بر هم عمودند $\rightarrow E(XY)=0 \rightarrow E(XY)=\underbrace{E(X)}_{0}E(Y) \rightarrow X,Y$ ناهمبسته **P**

28 ـ گزینه 3 صحیح است.

$r=0 \rightarrow$ X,Y همبستگی خطی ندارند. $\rightarrow \begin{cases} \text{یا } X,Y \text{ مستقل‌اند.} \\ \text{یا } X,Y \text{ همبستگی غیرخطی دارند.} \end{cases}$

ضریب همبستگی

29 ـ گزینه 3 صحیح است.

$$r = b\frac{S_x}{S_y} = -2\frac{1}{2} = -1 \quad (\text{ضریب همبستگی})$$

$$SS_y = 4SS_x \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}} S_y = 2S_x \rightarrow \frac{S_x}{S_y} = \frac{1}{2}$$

30 ـ گزینه 3 صحیح است.

$$\begin{cases} E(X_i) = 0 \\ Var(X_i) = 1 \end{cases}$$

$$\rho_{u,v} = \frac{Cov(U,V)}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Cov(u,v) = Cov(X_1+X_2+X_3, X_1) = Cov(X_1,X_1) + Cov(X_2,X_1) + Cov(X_3,X_1)$$

$$\xlongequal{x_i \text{ ها دو به دو نا همبسته}} Var(X_1) + 0 + 0 = \sigma^2_{X_1} = 1$$

$$Var(U) = Var(X_1+X_2+X_3) \xlongequal[\text{نا همبسته}]{x_i \text{ ها دو به دو}} Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$Var(V) = Var(X_1) = 1$$

یادآوری:

1) در صورتی‌که دو متغیر نا همبسته باشند، کواریانس آنها صفر خواهد بود.

2) هر گاه X_i ها دو به دو نا همبسته باشند $\quad Var\left(\sum X_i\right) = \sum Var(X_i)$

31 ـ گزینه 1 صحیح است.

$$\rho_{x,y} = 0.8 \rightarrow \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x.\sigma_y} = 0.8 \xrightarrow{\sigma_x=\sigma_y=1} \frac{Cov(X,Y)}{1\times 1} = 0.8 \rightarrow Cov(X,Y) = 0.8$$

U,V ناهمبسته هستند. $\rightarrow \rho_{u,v} = 0 \rightarrow Cov(U,V) = 0$

با توجه به اینکه $Cov(U,V)$ صفر است مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

$$Cov(U,V)=Cov(X+Y,aX-Y)=a\,Cov(X,X)-Cov(X,Y)+a\,Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)$$

$$=a\sigma_x^2-0.8+a(0.8)-\sigma_y^2=a\times1-0.8+0.8a-1=0 \rightarrow 1.8a=1.8 \rightarrow \boxed{a=1}$$

یادآوری: خواص کواریانس:

$$\begin{cases} Cov(aX+cY,bZ+dT)=ab\,Cov(X,Z)+ad\,Cov(X,T)+cb\,Cov(Y,Z)+cd\,Cov(Y,T) \\ Cov(X,X)=\sigma_x^2\ ,\ Cov(Y,Y)=\sigma_y^2 \end{cases}$$

32 ـ گزینه 2 صحیح است.

با توجه به مثبت بودن شیب خط رگرسیون حتماً ضریب همبستگی هم باید مثبت باشد. بنابراین گزینه 2 که علامت ضریب همبستگی در آن منفی است، نمی‌تواند ضریب همبستگی Y,X با خط رگرسیون $\hat{Y}=-5+2X$ باشد.

33 ـ گزینه 2 صحیح است.

با توجه به آنکه $\bar{x}$ و $\bar{y}$ در جدول موردنظر اعداد صحیحی هستند.

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{n}=\dfrac{21}{3}=7 \\ \bar{y}=\dfrac{\sum y_i}{n}=\dfrac{48}{3}=16 \end{cases}$$

به کارگیری فرمول زیر از نظر سادگی در محاسبه مناسب‌تر خواهد بود:

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$
5	20	-2	4
7	15	0	-1
9	13	2	-3

$\rightarrow$

$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
-8	4	16
0	0	1
-6	4	9
$\sum=-14$	$\sum=8$	$\sum=26$

$$r_{X,Y}=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2.\sum(y-\bar{y})^2}}=\frac{-14}{\sqrt{8\times26}}=\frac{-14}{4\sqrt{13}}=-\frac{7}{2\sqrt{13}}$$

ضریب تعیین

34 ـ گزینه 3 صحیح است.

$$\begin{cases} r_{X,Y}=0.6 \rightarrow R^2_{X,Y}=(0.6)^2=0.36 \\ r_{Z,W}=0.3 \rightarrow R^2_{Z,W}=(0.3)^2=0.09 \end{cases} \rightarrow \frac{R^2_{X,Y}}{R^2_{Z,W}}=\frac{0.36}{0.09}=4$$

بنابراین همبستگی دو متغیر اول چهار برابر قوی‌تر از دو متغیر دوم است.

رگرسیون

35 ــ گزینه 1 صحیح است.

برای به‌دست آوردن معادله خط رگرسیون باید شیب خط و عرض از مبدأ را به‌دست آوریم.

$$b = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.9\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \rightarrow b = 0.9\times\sqrt{4} = 0.9\times 2 = 1.8$$

حال باتوجه به این نکته که نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ همیشه از معادله خط رگرسیون می‌گذرد، عرض از مبدأ را به‌دست می‌آوریم.

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad \rightarrow \quad (\text{عرض از مبدأ})\ a = \bar{y} - b\bar{x} = 6 - 1.8\times 3 = 6 - 5.4 = 0.6$$

معادله خط رگرسیون: $\hat{y} = a + bx \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{y} = 0.6 + 1.8x}$

راه حل تستی: با توجه به نکته‌ای که دربالا اشاره شد یعنی اینکه نقطه $(\bar{x}\,,\,\bar{y})$ همیشه در معادله خط رگرسیون صدق می‌کند می‌توان این نقطه را $(\bar{x} = 3\,,\,\bar{y} = 6)$ در معادله رگرسیون گزینه‌ها امتحان کرد و گزینه‌ای را که نقطه $(3\,,6)$ در معادله‌اش صدق می‌کند به عنوان جواب انتخاب کرد.

$$1)\ \hat{y} = 0.6 + 1.8x \xrightarrow{\bar{x}=3\,,\,\bar{y}=6} 6 = 0.6 + 1.8\times 3 = 6 \ ✓$$

$$2)\ \hat{y} = 1.2 + 1.8x \xrightarrow{\bar{x}=3\,,\,\bar{y}=6} 6 \neq 1.2 + 1.8\times 3 = 6.6$$

$$3)\ \hat{y} = -0.6 + 1.8x \xrightarrow{\bar{x}=3\,,\,\bar{y}=6} 6 \neq -0.6 + 1.8\times 3 = 4.8$$

$$4)\ \hat{y} = 1.2 - 1.8x \xrightarrow{\bar{x}=3\,,\,\bar{y}=6} 6 \neq 1.2 - 1.8\times 3 = -4.2$$

36 ــ گزینه 1 صحیح است.

یادآوری: معادله خط رگرسیون برآورد شده همواره از نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ می‌گذرد در این سؤال نیز تنها مقادیر $\bar{x},\bar{y}$ را داریم و معادله خط رگرسیون با عرض از مبدأ معلوم بنابراین تنها راه ممکن این است که مقادیر $\bar{x},\bar{y}$ را در معادله صدق دهیم و مقدار شیب خط را به‌دست آوریم:

$$\sum x_i = \sum y_i = 30 \xrightarrow{n=10} \bar{x} = \bar{y} = 3$$

$$\bar{y} = -9 + \beta\bar{x} \xrightarrow{\bar{x}=\bar{y}=3} 3 = -9 + \beta\times 3 \rightarrow 3\beta = 12 \rightarrow \boxed{\beta = 4}$$

37 ــ گزینه 2 صحیح است.

با توجه به آنکه $\overline{x}$ و $\overline{y}$ در جدول موردنظر اعداد صحیحی هستند.

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{21}{3} = 7 \\ \overline{y} = \dfrac{\sum y_i}{n} = \dfrac{48}{3} = 16 \end{cases}$$

به کارگیری فرمول زیر از نظر سادگی در محاسبه مناسب‌تر خواهد بود:

x	y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$
5	20	−2	4
7	15	0	−1
9	13	2	−3

$\rightarrow$

$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$
−8	4
0	0
−6	4
$\sum = -14$	$\sum = 8$

شیب خط : $b = \dfrac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum (x-\overline{x})^2} = \dfrac{-14}{8} = -\dfrac{7}{4} = -1.75$

38 ــ گزینه 3 صحیح است.

با توجه به آنکه $\overline{x}$ و $\overline{y}$ در جدول موردنظر اعداد صحیحی هستند.

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{21}{3} = 7 \\ \overline{y} = \dfrac{\sum y_i}{n} = \dfrac{48}{3} = 16 \end{cases}$$

به کارگیری فرمول زیر از نظر سادگی در محاسبه مناسب‌تر خواهد بود:

x	y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$
5	20	−2	4
7	15	0	−1
9	13	2	−3

$\rightarrow$

$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$
−8	4
0	0
−6	4
$\sum = -14$	$\sum = 8$

شیب خط : $b = \dfrac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum (x-\overline{x})^2} = \dfrac{-14}{8} = -\dfrac{7}{4} = -1.75$

با توجه به این نکته که نقطه $(\overline{x}, \overline{y})$ همواره از خط رگرسیون می‌گذرد داریم:

$\overline{y} = a + b\overline{x} \quad \rightarrow$ عرض از مبدأ : $a = \overline{y} - b\,\overline{x} = 16 - (-1.75)\times 7 = 16 + 12.25 = 28.25$

خودآزمایی

دوجمله‌ای

1 ـ تاسی را 144 بار می‌ریزیم. واریانس دفعاتی که عدد 6 بالا قرار گیرد، کدام است؟

1) $\sqrt{20}$ 2) 20 3) 40 4) 400

2 ـ یک جفت تاس سالم را 18 بار پرتاب می‌کنیم. انتظار دارید چند بار هر دو عدد رو شده مضرب 3 باشند؟

1) 2 2) 3 3) 5 4) 4

3 ـ سکه سالمی 20 بار پرتاب می‌شود، اگر متغیر تصادفی x تعداد یک روی ظاهر شده از سکه باشد، مطلوب است امید ریاضی و واریانس x ؟

1) $15 , \sqrt{15}$ 2) $20 , 5$ 3) $10 , \sqrt{5}$ 4) $10 , 5$

4 ـ اگر $P(X=x)=\dfrac{\binom{4}{x}}{16}$، تابع احتمال بر روی مجموعه $\{0,1,2,3,4\}$ باشد، واریانس x کدام است؟

1) 1.75 2) 1.5 3) 1.25 4) 1

5 ـ در یک توزیع دو جمله‌ای اگر میانگین برابر 30 و واریانس برابر 10 باشد، مقدار p (احتمال موفقیت) کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 4) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

6 ـ میزان برگشت از خریدهای شرکتی 10% خریدها بوده؛ احتمال این که با انتخاب تصادفی 4 قلم از خریدهای شرکت «هیچ یک برگشت نشده باشند»، چقدر است؟

1) 0.6561 2) 0.36 3) 0.0001 4) 0.09

7 ـ احتمال فارغ‌التحصیل شدن پذیرفتگان یک دانشکده برابر 0.8 بوده؛ چقدر احتمال دارد که از بین 4 دانشجوی این دانشکده، 3 نفر فارغ‌التحصیل شوند؟

1) 0.4096 2) 0.384 3) 0.48 4) 0.6

8 ـ ده سکه همتراز را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر x را تعداد دفعات ظاهر شدن شیر در نظر بگیریم به طور متوسط انتظار داریم چند شیر ظاهر شود.

1) 5 2) 10 3) 100 4) 1024

9 ـ اگر x تعداد پرتاب های منجر به گل یک بسکتبال باشد و میانگین آن‌ها 20 و واریانس آن $\frac{20}{3}$ باشد، آن‌گاه احتمال این‌که در 5 پرتاب حداقل 1 پرتاب گل شود چقدر است؟

1) $\frac{1}{243}$ 2) $\frac{80}{243}$ 3) $\frac{239}{243}$ 4) $\frac{242}{243}$

چندجمله‌ای

10 ـ در یک کارگاه تک تولیدی 50 درصد کالاها مرغوب، 40 درصد متوسط و 10 درصد نامرغوب‌اند. اگر 5 عدد از این کالاها به تصادف برداشته شود، با کدام احتمال 2 عدد مرغوب و 2 عدد متوسط و یک عدد نامرغوب‌اند؟

1) 0.12 2) 0.15 3) 0.16 4) 0.24

11 ـ از انباری با تعداد زیادی کالا که 50% آنها از نوع الف، 30% از نوع ب و 20% از نوع ج بوده؛ با انتخاب تصادفی 3 کالا، چقدر احتمال دارد که از هر نوع «یک عدد» برداشته شده باشد؟

1) 0.03 2) 0.18 3) 0.06 4) 0.09

دوجمله‌ای منفی

12 ـ اگر تا انهدام کامل یک هدف، به‌سوی آن شلیک شود و فرض کنیم که احتمال اصابت هر راکت به هدف 0.3 است، برای انهدام کامل هدف اصابت دو راکت لازم است. احتمال این‌که با شلیک پنجمین راکت هدف کاملاً نابود شود، چند است؟

1) 0.6225 2) 0.1235 3) 0.2425 4) 0.4245

13 ـ اگر فوتبالیستی 80% پنالتی‌هایش را وارد دروازه کند، چقدر احتمال دارد که پنجمین پنالتی او سومین موفقیتش باشد؟

1) 0.2048 2) 0.1536 3) 0.1229 4) 0.0819

هندسی

14 ـ تاسی را آن قدر می‌ریزیم تا بالاخره عدد یک بالا قرار گیرد. احتمال آن‌که در سومین نوبت ریختن تاس، برای اولین دفعه عدد یک بالا قرار گیرد، کدام است؟

1) $\frac{1}{216}$ 2) $\frac{1}{36}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{25}{216}$

15 ـ تاسی را آن‌قدر می‌ریزیم تا سرانجام عدد شش ظاهر شود. واریانس تعداد دفعاتی که باید منتظر باشیم تا سرانجام عدد شش ظاهر شود، کدام است؟

1) $\frac{6}{5}$ 2) $\frac{25}{6}$ 3) 6 4) 30

فوق هندسی

16 ـ از بین 10 نفر کارمند شرکتی که 7 نفر از آنها تحصیلات دانشگاهی دارند، 5 نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. اگر x تعداد افرادی باشند که تحصیلات دانشگاهی دارند، واریانس x کدام است؟

1) 0.81 2) 0.94 3) 0.58 4) 1.05

17 ـ از دوازده عدد تخم‌مرغ که سه عدد آن شکسته و بقیه سالم‌اند سه عدد تخم مرغ را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که هر سه عدد سالم باشند، کدام است؟

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{12}$ 3) $\frac{23}{45}$ 4) $\frac{21}{55}$

پواسن

18ـ تعداد سرکشی‌های اضطراری به یک خط تولید دارای توزیع پواسون با متوسط 3 سرکشی در روز است. احتمال این‌که در یک روز هیچ سرکشی‌ای صورت نگرفته باشد، چقدر است؟

1) e^{-3} 2) $3e^{-3}$ 3) $2e^{-3}$ 4) $\frac{1}{3}e^{-3}$

19ـ به طور متوسط با توزیع پواسون در هر دقیقه دو اتومبیل برای زدن بنزین بدون سرب به پمپ‌بنزینی مراجعه می‌کنند. احتمال این‌که در پنج دقیقه دو اتومبیل مراجعه کنند، چقدر است؟

1) $50\,e^{-10}$ 2) $2e^{-5}$ 3) $4e^{-4}$ 4) $10e^{-10}$

20ـ میانگین و واریانس توزیع پواسون به ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟

1) $\lambda\,,\lambda$ 2) $\sqrt{\lambda}\,,\lambda$ 3) $\frac{1}{\lambda^2}\,,\lambda$ 4) $\frac{1}{\lambda^2}\,,\frac{1}{\lambda}$

21ـ تعداد مشتریانی که به بانک مراجعه می‌کنند دارای توزیع پواسون با میانگین 2 مشتری در هر دقیقه است. با کدام احتمال در 1.5 دقیقه اول کمتر از 4 مشتری مراجعه می‌کنند؟ $\left(e^{-3}=0.05\right)$

1) 0.325 2) 0.425 3) 0.55 4) 0.65

22ـ در کدام یک از توزیع‌های زیر مقدار انحراف معیار همواره برابر است با جذر مقدار میانگین؟

1) توزیع نرمال 2) توزیع دو جمله‌ای 3) توزیع نمایی 4) توزیع پواسن

23ـ یک تایپیست به طور متوسط در هر 5 صفحه، 1 لغت را غلط تایپ می‌کند. احتمال اینکه در 10 صفحه دارای 2 غلط تایپی باشد، چقدر است؟

1) e^{-2} 2) $\frac{1}{2}e^{-2}$ 3) $2e^{-2}$ 4) $4e^{-2}$

تقریب دوجمله‌ای به پواسن

24ـ احتمال بروز عوارض جانبی در مقابل مصرف نوعی دارو در یک بیمار 0.002 بوده با مصرف این دارو توسط 500 بیمار، احتمال آنکه فقط 2 نفرشان دچار عوارض جانبی شوند، برابر «چه عددی» است؟

1) $\frac{1}{2e}$ 2) $\frac{2}{e^2}$ 3) $\frac{2}{e}$ 4) $\frac{1}{e^2}$

25ـ معمولاً $\frac{1}{100}$ مسافران هواپیماها به موقع به پرواز نمی‌رسند. احتمال آن‌که از 200 مسافر یک پرواز سه نفر به موقع نرسند، کدام است؟ $\left(e=2.7\right)$

1) 0.000001 2) 0.01 3) 0.1 4) 0.18

یکنواخت پیوسته

26 ـ میانگین متغیر تصادفی X با این تابع چگالی چقدر است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3} & , \\ 0 & ,\end{cases}$$

28 ـ 27 ـ $-1<x<\frac{1}{2}$

29 ـ در غیر این‌صورت

(1 $\frac{3}{4}$ (2 $\frac{1}{4}$ (3 $-\frac{3}{4}$ (4 $-\frac{1}{4}$

30 ـ واریانس متغیر تصادفی X در سؤال قبل چقدر است؟

(1 $\frac{1}{16}$ (2 $\frac{3}{16}$ (3 $\frac{9}{4}$ (4 $\frac{4}{9}$

31 ـ اگر محموله‌ای متشکل از 10 قلم کالا باشد که وزن هر قلم کالا دارای توزیع یکنواخت با پارامترهای $\alpha = 13$ و $\beta = 25$ تن باشد، کدام‌یک از عبارت‌های ذیل در مورد محموله صحیح است؟

(1 $\sigma^2 = 190$، $\mu = 120$، و توزیع یکنواخت

(2 $\sigma^2 = 190$، $\mu = 120$، و توزیع نرمال

(3 $\sigma^2 = 120$، $\mu = 190$، و توزیع نرمال

(4 $\sigma^2 = 120$، $\mu = 190$، و توزیع نامشخص

نمایی

32 ـ متغیر تصادفی X با توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 3$ مفروض است. واریانس متغیر تصادفی X با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

(1 3 (2 9 (3 $\frac{1}{3}$ (4 $\frac{1}{9}$

33 ـ به طور متوسط با توزیع نمایی هر 5 دقیقه یک مشتری به اتو بانکی مراجعه می‌کند. امید ریاضی تعداد افرادی که در هر دقیقه مراجعه می‌کنند با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

(1 5 (2 $\frac{1}{5}$ (3 12 (4 $\frac{1}{12}$

34 ـ در سؤال قبل، واریانس تعداد افرادی که در هر 5 دقیقه مراجعه می‌کنند با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

(1 $\frac{1}{5}$ (2 $\frac{1}{25}$ (3 $\frac{1}{12}$ (4 $\frac{1}{144}$

35ـ فرض کنید T، یک متغیر تصادفی از نوع نمایی باشد، کدام یک از روابط ذیل برقرار است؟

1) $P(T > a + b \mid T > a) = P(T > b)$
2) $P(T > a + b \mid T > b) = P(T > a)$
3) $P(T > a + b \mid T > b) = P(T > b)$
4) $P(T > a + b \mid T > a) = P(T > a)$

نرمال

36ـ زمان لازم برای انجام کارهای بانکی یک مشتری به طور متوسط 2 دقیقه با انحراف معیار 40 ثانیه است. در توزیع نرمال 5 درصد از مشتریان بیشترین زمان را گرفته‌اند. حداقل این زمان چند ثانیه است؟ $\left(S_0^{1.65} = 0.45\right)$

1) 186
2) 176
3) 172
4) 152

37ـ نمرات آزمون داوطلبان یک توزیع نرمال با میانگین 66 و انحراف معیار 4 می‌باشد، چند درصد این داوطلبان نمراتی بین $(60 , 72)$ دارند؟ $\left(\int_{-\infty}^{1.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.0668\right)$

1) 43.34
2) 46.66
3) 86.64
4) 93.32

38ـ با فرض اینکه نمرات درس ریاضی دانشجویان یک دانشگاه دارای توزیع نرمال با میانگین 14 و واریانس 16 باشد، احتمال اینکه یک دانشجو نمره‌ای کمتر از 10 کسب کند، چقدر است؟

1) 0.32
2) 0.68
3) 0.50
4) 0.16

39ـ در یک آزمون بزرگ (کنکور) میانگین نمرات 60 و انحراف معیار نمرات 20 است. اگر 10% شرکت کنندگان بتوانند قبول شوند، حداقل نمره قبولی چقدر خواهد بود اگر بدانیم که $\int_{-\infty}^{1.28} = 0.9$

1) 75.6
2) 85
3) 75
4) 85.6

40ـ در یک بررسی از یک توزیع نرمال $\mu = 100$ و $\sigma = 15$ مشاهده شده است. چه نسبتی از این افراد 130 یا بالاتر از 130 هستند؟ $\int_{-2}^{+2} f_z(z) d_z = 0.9544$

1) 0.0228
2) 0.0456
3) 0.0912
4) 0.4772

41ـ برای رسم نمودار احتمال در صفحه احتمال نرمال برای داده‌های طبقه‌بندی شده، از کدام‌یک از موارد ذیل استفاده می‌شود؟

1) محور افقی حدود طبقات، محور عمودی فراوانی نسبی
2) محور افقی فراوانی نسبی، محور عمودی حدود طبقات
3) محور افقی حدود بالای طبقات، محور عمودی فراوانی تجمعی یا نسبی
4) محور افقی حدود بالای طبقات، محور عمودی فراوانی نسبی تجمعی

نرمال استاندارد

42 ـ **نمرات احمد و محمود در درس ریاضی 18 و 12 و نمرات استاندارد شده آن‌ها به ترتیب 1 و -1 می‌باشد، میانگین و انحراف معیار نمرات ریاضی کل دانشجویان به ترتیب کدامند؟**

1) $2 , 15$ 2) $3 , 15$ 3) $2 , 16$ 4) $3 , 16$

تقریب دوجمله‌ای به نرمال

43 ـ **اگر n و p پارامترهای توزیع دو جمله‌ای باشند، در کدام حالت دقت تخمین احتمال با تبدیل به توزیع نرمال بیشتر است؟**

1) $n = 20 , p = 0.4$ 2) $n = 20 , p = 0.45$

3) $n = 30 , p = 0.25$ 4) $n = 5 , p = 0.6$

تقریب توزیع پواسن به نرمال

44 ـ **توزیع پواسونی با $\lambda = 36$ را درنظر بگیرید؛ پارامترهای تقریب نرمال آن کدام است؟**

1) $\sigma=36,\mu=36$ 2) $\sigma=36,\mu=6$

3) $\sigma=6,\mu=36$ 4) $\sigma=6,\mu=6$

χ^2 کای ـ دو، (خی‌دو، مربع‌کای، کای‌اسکور)

45 ـ **اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس 1 باشد آن‌گاه $Y=X^2$ دارای توزیع:**

1) نرمال است. 2) χ^2 با یک درجه آزادی است.

3) T با یک درجه آزادی است. 4) χ^2 با $\frac{1}{2}$ درجه آزادی است.

46 ـ **درجه آزادی یک توزیع کای ـ مربع 5 است. میانگین و واریانس آن از چپ به راست کدام است؟**

1) $(5 , 5)$ 2) $(10 , 5)$ 3) $(10 , 10)$ 4) $(5 , 10)$

فیشر F

47 ـ **اگر x_2 , x_1 دارای توزیع نرمال استاندارد مستقل باشند، در آنصورت توزیع متغیر تصادفی $y=\frac{(x_1+x_2)^2}{(x_1-x_2)^2}$ عبارتست از:**

1) مربع کای با یک درجه آزادی 2) مربع کای با دو درجه آزادی

3) توزیع f با یک و یک درجه آزادی 4) توزیع t با یک درجه آزادی

دو جمله‌ای

1 ـ گزینه 2 صحیح است.

احتمال اینکه در پرتاب یک تاس عدد شش بیاید برابر $\frac{1}{6}$ است. بنابراین احتمال موفقیت ثابت بوده و توزیع تعداد موفقیت در نمونه دو جمله‌ای است با:

$$\begin{cases} p=\frac{1}{6}\ ,\ q=\frac{5}{6}\ ,\ n=144 \\ x: \text{تعداد دفعات آمدن 6 در 144 بار پرتاب تاس} \\ Var(x)=npq=144\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=20 \quad \text{می‌دانیم در توزیع دو جمله‌ای واریانس عبارت است از:} \end{cases}$$

2 ـ گزینه 1 صحیح است.

توجه: می‌دانیم امید ریاضی همان تعداد مورد انتظار است.

در پرتاب یک جفت تاس احتمال اینکه هر دو عدد رو شده مضرب 3 باشند، عبارت است از:

$$\begin{cases} P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9} \\ \text{هر دو عدد مضرب 3}\ A:\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}\to n(A)=4 \\ \text{کل حالات پرتاب 2 تاس}=6^2=36 \end{cases}$$

یادآوری: فضای نمونه پرتاب k تاس برابر 6^k است.

حال 18بار یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم و تعداد مورد انتظار از مضرب 3 بودن هر دو عدد را می‌خواهیم:

احتمال موفقیت «مضرب 3 بودن دو عدد در پرتاب یک جفت تاس» ثابت است. بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه « $n=18$ بار پرتاب جفت تاس» دو جمله‌ای است با:

$$\begin{cases} x: \text{تعداد نتیجه دو عدد مضرب 3 در پرتاب } n=18 \text{ بار یک جفت تاس} \\ p=\frac{1}{9}\ ,\ q=\frac{8}{9}\ ,\ n=18 \quad \text{می‌دانیم که در توزیع دوجمله‌ای امید ریاضی عبارت است از:} \\ E(X)=np=18\times\frac{1}{9}=2 \end{cases}$$

3 ـ گزینه 4 صحیح است.

می‌دانیم که سکه دو رو دارد بنابراین احتمال ظاهر شدن یک روی آن برابر $\frac{1}{2}$ است. حال احتمال موفقیت ثابت است پس توزیع تعداد موفقیت در نمونه دو جمله‌ای است با:

$p=\frac{1}{2}\ ,\ n=20$.

می‌دانیم که در توزیع دوجمله‌ای امید و واریانس عبارت است از:

$$\begin{cases} X: \text{تعداد یک روی ظاهر شده در 20 بار پرتاب سکه} \\ E(x) = np = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \\ Var(x) = npq = 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 5 \\ n = 20 \ , \ p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4 ـ **گزینه 4 صحیح است.**

حالت خاص تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n \ , \ p = q = \frac{1}{2}$ به صورت زیر است:

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n} \quad ; \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

تابع داده شده در این سؤال نیز تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای با $n = 4$ و $p = q = \frac{1}{2}$ است زیرا که با توجه به تابع بالا داریم:

$$P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}}{2^4} = \frac{\binom{4}{x}}{16} \ ; \ x = 0,1,2,3,4$$

بنابراین واریانس آن عبارت است از:

$$Var(x) = npq = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

5 ـ **گزینه 2 صحیح است.**

می‌دانیم که در توزیع دو جمله‌ای با پارامتر $p \ , \ n$ میانگین و واریانس عبارت است از:

$$\begin{cases} \mu = np = 30 \\ \sigma^2 = npq = 10 \xrightarrow{np = 30} 30q = 10 \to q = \frac{1}{3} \to p = 1 - q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

6 ـ **گزینه 1 صحیح است.**

احتمال موفقیت ثابت است. بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه دو جمله‌ای است. در این سؤال «برگشت شدن» موفقیت است $p = 0.1$ و تعداد نمونه برابر $n = 4$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} x: \text{تعداد کالاهای برگشتی در 4 نمونه} \\ P(x = 0) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{4}{0} (0.1)^0 (0.9)^{4-0} = (0.9)^4 = 0.6561 \\ p = 0.1 \ , \ q = 0.9 \ , \ n = 4 \end{cases}$$

7ـ **گزینه 1 صحیح است.**

احتمال موفقیت ثابت است $(p = 0.8)$ بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n = 4)$ دوجمله‌ای است با:

$p = 0.8\ ,\ q = 0.2\ ,\ n = 4$

$$P(x=3) = \binom{4}{3}(0.8)^3(0.2)^{4-3} = 4\times0.512\times0.2 = 0.4096$$

8ـ **گزینه 1 صحیح است.**

منظور جمله «به طور متوسط انتظار داریم» همان امید ریاضی X است چون می‌دانیم که امید ریاضی همان تعداد مورد انتظار است.

احتمال شیر آمدن سکه ثابت است $\left(p = \frac{1}{2}\right)$ بنابراین توزیع تعداد موفقیت (شیر آمدن) در نمونه ($n = 10$ پرتاب) دارای توزیع دو جمله‌ای است با:

$x =$ تعداد شیر در $n = 10$ بار پرتاب سکه

$n = 10\ ,\ p = \frac{1}{2}\ ,\ q = \frac{1}{2}$

می‌دانیم در توزیع دوجمله‌ای امید ریاضی عبارت است از: $E(x) = np = 10\times\frac{1}{2} = 5$

9ـ **گزینه 4 صحیح است.**

احتمال موفقیت (گل شدن) ثابت است. بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه ($n = 5$ پرتاب)دوجمله‌ای است.

می‌دانیم که در توزیع دوجمله‌ای میانگین و واریانس عبارت است از:

$X:$ تعداد گل در $n = 5$ پرتاب

$\mu = np = 20$

$$\sigma^2 = npq = \frac{20}{3} \xrightarrow{np = 20} 20q = \frac{20}{3} \rightarrow q = \frac{1}{3}\ ,\ p = 1 - q = \frac{2}{3}$$

P (حداقل یک گل در 5 پرتاب) $= P(x\geq1) = 1 - P(x<1) = 1 - P(x=0) = 1 - \binom{n}{0}p^0q^{n-0}$

$$= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{5-0} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{242}{243}$$

نکته: همیشه برای محاسبه احتمال حداقل یکی بهتر است از حالت مکمل آن یعنی ((هیچ) P − 1) استفاده کنیم.

چند جمله‌ای

10 ـ گزینه 1 صحیح است.

باتوجه به اینکه تعداد احتمال‌های داده شده بیشتر از 2 حالت موفقیت و شکست است از توزیع چند جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$p_1 = 0.5$ (مرغوب) و $p_2 = 0.4$ (متوسط) و $p_3 = 0.1$ (نامرغوب) و $\sum p = 1 \quad , \quad n = 5$

$$P\left(x_1 = 2 \,,\, x_2 = 2 \,,\, x_3 = 1\right) = \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, x_3!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{x_3}$$

$$= \frac{5!}{2!2!1!}\left(0.5\right)^2 \left(0.4\right)^2 \left(0.1\right)^1 = \frac{120}{4} \times 0.25 \times 0.16 \times 0.1 = 0.12$$

11 ـ گزینه 2 صحیح است.

باتوجه به اینکه بیشتر از دو حالت «موفقیت و شکست» احتمال وجود دارد از توزیع چند جمله‌ای استفاده خواهیم کرد.

$$\begin{cases} p_1 = 0.5 \,,\, p_2 = 0.3 \,,\, p_3 = 0.2 \,,\, \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \,,\, n = 3 \\ P\left(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1\right) = \dfrac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} = \dfrac{3!}{1!1!1!}\left(0.5\right)^1 \left(0.3\right)^1 \left(0.2\right)^1 = 0.18 \end{cases}$$

دو جمله‌ای منفی

12 ـ گزینه 2 صحیح است.

راه حل اول: در شلیک پنجم بایستی برای دومین‌بار هدف مورد اصابت واقع شود تا کاملاً نابود شود یعنی دومین موفقیت در شلیک پنجم اتفاق بیافتد.

باتوجه به اینکه احتمال اصابت به هدف ثابت است $(p = 0.3)$ بنابراین توزیع تعداد تکرار برای رسیدن به $r = 2$ امین موفقیت دوجمله‌ای منفی است با:

$$\begin{cases} p = 0.3 \,,\, q = 0.7 \quad , \quad x = 5 \,,\, r = 2 \\ P(X = 5) = \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r q^{x-r} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} (0.3)^2 (0.7)^{5-2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (0.3)^2 (0.7)^3 = 0.12348 \end{cases}$$

راه حل دوم: دقت کنید که بدون تشخیص توزیع دوجمله‌ای منفی نیز می‌توانستیم مسئله را حل کنیم. در واقع وقتی برای انهدام کامل هدف 2 راکت لازم است و می‌خواهیم با شلیک پنجمین راکت هدف کاملاً نابود شود، پس، از 4 شلیک قبلی، 1 راکت به هدف خورده (توزیع دوجمله‌ای) و شلیک پنجم نیز به هدف خورده است.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (0.3)^1 (0.7)^3}_{\text{در چهار شلیک اول یک بار موفقیت}} \times \underbrace{(0.3)}_{\text{شلیک پنجم}} = 0.12348$$

نکته: در صورتی که احتمال موفقیت ثابت باشد و جای موفقیت در نمونه مهم نباشد (تعداد موفقیت مهم باشد) توزیع دوجمله‌ای است و در صورتی که جای موفقیت مهم باشد توزیع هندسی (اولین) یا دوجمله‌ای منفی(rامین موفقیت) خواهد بود.

13ـ **گزینه 3 صحیح است.**

توزیع تعداد تکرار برای رسیدن به rامین موفقیت دو جمله‌ای منفی است.

$$p = 0.8, q = 0.2, r = 3$$

$$P(X=5) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = \binom{5-1}{3-1} (0.8)^3 (0.2)^2 = 6 \times 0.512 \times 0.04 = 0.1229$$

هندسی

14ـ **گزینه 4 صحیح است.**

احتمال موفقیت (یک آمدن تاس) ثابت و برابر $\left(p = \frac{1}{6}\right)$ است. بنابراین توزیع تعداد تکرار برای رسیدن به اولین موفقیت هندسی است با:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{6}, \ q = 1 - p = \frac{5}{6} \\ P(x=3) = pq^{x-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{25}{216} \end{cases}$$

15ـ **گزینه 4 صحیح است.**

احتمال موفقیت (شش آمدن تاس) ثابت و برابر $\left(p = \frac{1}{6}\right)$ است. بنابراین توزیع تکرار برای رسیدن به اولین موفقیت هندسی است با:

$$p = \frac{1}{6}, \ q = \frac{5}{6}$$

یادآوری: در توزیع هندسی میانگین و واریانس عبارت است از:

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{p} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{q}{p^2} \\ \sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30 \end{cases}$$

فوق هندسی

16ـ گزینه 3 صحیح است.

جامعه محدود $(N = 10)$ و پیش‌فرض انتخاب نمونه بدون جایگذاری است بنابراین احتمال موفقیت ثابت نبوده و توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n = 5)$ فوق هندسی خواهد بود.

$$N = 10 \,,\; n = 5 \,,\; k = 7$$

$$Var(x) = \frac{N-n}{N-1} \times n \times \frac{k}{N} \times \left(1 - \frac{k}{N}\right) = \frac{10-5}{10-1} \times 5 \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{7}{12} = 0.58$$

17ـ گزینه 4 صحیح است.

تعداد جامعه محدود $(N = 12$ تخم مرغ) و پیش‌فرض نمونه‌گیری بدون جایگذاری است، پس احتمال موفقیت در جامعه ثابت نبوده و توزیع تعداد موفقیت (سالم بودن) در نمونه فوق هندسی است با:

$$\begin{cases} N = 12 \,,\; n = 3 \,,\; k = 9 \;\; (\text{سالم}) \\ P(x = 3) = \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{9}{3}\binom{3}{0}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{7 \times 8 \times 9}{10 \times 11 \times 12} = \dfrac{21}{55} \end{cases}$$

دقت کنید که اگر در صورت سؤال ذکر می‌شد نمونه‌گیری با جایگذاری است آنگاه احتمال موفقیت ثابت بود و توزیع تعداد موفقیت در نمونه دوجمله‌ای می‌شد.

پواسون

18ـ گزینه 1 صحیح است.

$$\begin{cases} P(X = 0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-3}3^{0}}{0!} = e^{-3} \\ x:\ \text{تعداد سرکشی در روز} \;,\; \lambda = 3\ \text{متوسط سرکشی در روز} \end{cases}$$

19ـ گزینه 1 صحیح است.

$$\lambda = 2\ \text{متوسط اتومبیل در دقیقه} \xrightarrow[\substack{\text{اتومبیل 2} \quad \text{1 دقیقه} \\ \text{اتومبیل x} \quad \text{5 دقیقه}}]{\text{تناسب می‌بندیم}} \lambda = 10\ \text{اتومبیل در 5 دقیقه}$$

$$\begin{cases} P(X = 2) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-10}10^{2}}{2!} = 50e^{-10} \\ x:\ \text{تعداد اتومبیل در 5 دقیقه} \;,\; \lambda = 10\ \text{متوسط اتومبیل در 5 دقیقه} \end{cases}$$

20 ــ گزینه 1 صحیح است.

یادآوری: میانگین و واریانس در توزیع پواسون با هم برابر و مساوی با پارامتر توزیع یعنی همان λ هستند.

$\mu = \sigma^2 = \lambda$

21 ــ گزینه 4 صحیح است.

$$\lambda = 2 \text{ متوسط مشتری در دقیقه } \xrightarrow[\substack{\text{مشتری 2} \quad \text{1 دقیقه} \\ \text{مشتری x} \quad \text{1.5 دقیقه}}]{\text{تناسب می‌بندیم}} \lambda = 3 \text{ متوسط مشتری در 1.5 دقیقه}$$

$$P(x<4) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3) = \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3}3^0}{0!}+\frac{e^{-3}3^1}{1!}+\frac{e^{-3}3^2}{2!}+\frac{e^{-3}3^3}{3!} = e^{-3}\left(1+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}\right) = 13e^{-3} = 13\times 0.05 = 0.65$$

x : تعداد مشتری در 1.5 دقیقه , $\lambda = 3$ متوسط مشتری در 1.5 دقیقه

22 ــ گزینه 4 صحیح است.

یادآوری: میانگین و واریانس در توزیع پواسون با هم برابر و مساوی با پارامتر توزیع یعنی همان λ هستند.

در توزیع پواسون انحراف معیار همواره برابر با جذر میانگین است. $\mu = \sigma^2 = \lambda \rightarrow \sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{\lambda} \rightarrow$

23 ــ گزینه 3 صحیح است.

یادآوری: توزیع تعداد اتفاقات در واحد مکان پواسن است و می‌دانیم در توزیع پواسن میانگین برابر با پارامتر توزیع «λ» است.

$$\lambda = 1 \text{ متوسط غلط در هر 5 صفحه } \xrightarrow[\substack{\text{غلط 1} \quad \text{5 صفحه} \\ \text{غلط x} \quad \text{10 صفحه}}]{\text{تناسب می‌بندیم}} \lambda = 2 \text{ متوسط غلط در هر 10 صفحه}$$

$$\begin{cases} P(x=2) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \dfrac{e^{-2}2^2}{2!} = 2e^{-2} \\ x: \text{تعداد غلط تایپی در 10 صفحه} \quad , \quad \lambda = 2 \end{cases}$$

تقریب دو جمله‌ای به پواسون

24 ــ گزینه 1 صحیح است.

مقدار احتمال ثابت و برابر 0.002 است و $n = 500$ نفر است. بنابراین باتوجه به ثابت بودن احتمال موفقیت در جامعه توزیع تعداد موفقیت در نمونه دوجمله‌ای است با: $n = 500 , p = 0.002$

یادآوری:هرگاه در توزیع دو جمله‌ای $n \geq 100$ و $np \leq 10$ باشد، تقریب آن به پواسون مناسب است و $\lambda = np$ در نظر گرفته می‌شود.

در این سؤال نیز $n = 500 \geq 100$ و $np = 500 \times 0.002 = 1 \leq 10$ است، بنابراین از تقریب پواسون استفاده خواهیم کرد.

البته با کمی توجه به گزینه‌ها نیز می‌توان فهمید که باید از تقریب پواسون استفاده کنیم چون گزینه‌ها برحسب e داده شده است.

$$\begin{cases} P(x=2) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-1}1^{2}}{2!} = \dfrac{e^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2e} \\ \lambda = np = 500 \times 0.002 = 1 \end{cases}$$

25 ـ **گزینه 4 صحیح است.**

احتمال موفقیت ثابت است (به پرواز نرسیدن) $p = \frac{1}{100}$ ، بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n = 200)$ دوجمله‌ای است.

یادآوری: می‌دانیم که هرگاه در توزیع دو جمله‌ای $n \geq 100$ و $np < 10$ باشد، تقریب آن به توزیع پواسون با $\lambda = np$ مناسب است.

البته با کمی توجه به گزینه‌ها نیز می‌توان فهمید که باید از تقریب پواسون استفاده کنیم چون گزینه‌ها برحسب e داده شده است.

بنابراین در این سؤال داریم: $n = 200 \geq 100$ و $np = 200 \times \frac{1}{100} = 2 < 10$، پس از تقریب پواسون با $\lambda = 2$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} P(X=3) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-2}2^{3}}{3!} = \dfrac{8}{6}e^{-2} = \dfrac{4}{3e^{2}} = \dfrac{4}{3(2.7)^{2}} = 0.18 \\ \lambda = np = 200 \times \dfrac{1}{100} = 2 \end{cases}$$

یکنواخت پیوسته

26 ـ **گزینه 4 صحیح است.**

با توجه به اینکه تابع چگالی داده شده یک عدد ثابت است، می‌فهمیم که تابع چگالی توزیع یکنواخت پیوسته در فاصله $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ است، بنابراین میانگین آن عبارت است از:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{1}{2} - (-1)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad ; \quad -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

27 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{\left(\frac{1}{2}-(-1)\right)^2}{12}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{12}=\frac{\frac{9}{4}}{12}=\frac{3}{16}$$

28 ـ گزینه 3 صحیح است.

وزن هر قلم کالا : $X \sim$ یکنواخت $(\alpha=13,\beta=25)$

$\mu_X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{13+25}{2}=\frac{38}{2}=19 \rightarrow$ میانگین محموله : $19\times10=190$

$\sigma_X^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}=\frac{(25-13)^2}{12}=\frac{(12)^2}{12}=12 \rightarrow$ واریانس محموله : $12\times10=120$

نکته: هرگاه n تعداد متغیرهای دارای توزیعی غیرنرمال زیاد باشد، توزیع مجموع آنها نرمال خواهد بود.

نمایی

29 ـ گزینه 4 صحیح است.

$X \sim$ نمایی $, \lambda=3$

می‌دانیم که واریانس توزیع نمایی عبارت است از : $\sigma_X^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

30 ـ گزینه 2 صحیح است.

متوسط مشتری در 5 دقیقه $\lambda=1$ $\rightarrow$ متوسط مشتری در هر دقیقه $\lambda=\frac{1}{5}$

یادآوری: اگر X توزیع تعداد اتفاق در واحد زمان پواسون با پارامتر λ باشد، توزیع زمان بین دو اتفاق و یا زمان تا اولین اتفاق نمایی با همان پارامتر λ است.

$X:$ تعداد افراد در دقیقه $\sim$ پواسون $\rightarrow \mu_X=\lambda=\frac{1}{5}$

31 ـ گزینه ؟ صحیح است.

یادآوری: اگر X توزیع تعداد اتفاق در واحد زمان پواسون با پارامتر λ باشد، توزیع زمان بین دو اتفاق و یا زمان تا اولین اتفاق نمایی با همان پارامتر λ است.

$X:$ تعداد افراد در 5 دقیقه $\sim$ پواسون و $\lambda=1 \rightarrow \sigma^2=\lambda=1$

متأسفانه جواب در گزینه‌ها نیست.

32 ـ گزینه 2 و 1 صحیح است.

یادآوری: خاصیت مهم توزیع نمایی بدون حافظه بودن آن است. یعنی اگر متغیر x با توزیع نمایی تا زمان n اتفاق نیافتد $(x > n)$ آنگاه وقوع آن در m واحد زمان بعدی $(x > n + m)$ مستقل از زمان قبل (n) است. خاصیت بالا را به‌صورت ریاضی می‌توان این طور نوشت.

$$P(x > m + n \mid x > n) = P(x > m)$$

یعنی احتمال اینکه x تا زمان $m + n$ اتفاق نیافتد به شرط آنکه بدانیم تا زمان n نیز اتفاق نیافتده است، برابر است با احتمال اتفاق نیافتدن آن در زمان m

$$\begin{cases} P(T > a + b \mid T > a) = P(T > b) \\ P(T > a + b \mid T > b) = P(T > a) \end{cases}$$

نرمال

33 ـ گزینه 1 صحیح است.

توجه کنید: میانگین و انحراف معیار باید هم واحد باشند. چون حداقل زمان را به ثانیه خواسته پس میانگین را نیز به ثانیه تبدیل می‌کنیم.

زمان به ثانیه : $X : N\left(\mu = 2 \text{ min} = 2 \times 60 = 120 \text{ ثانیه}, \sigma^2 = 40^2 (\text{ثانیه})^2\right)$

حال «5% از مشتریان بیشترین زمان را گرفته‌اند» بدین معنی است که:

$$(1) \quad P(x \geq a) = 0.05 \rightarrow P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{a-120}{40}\right) = P\left(Z > \frac{a-120}{40}\right) = 0.05$$

$$(2)\ S_0^{1.65} = P(0 < Z < 1.65) = 0.45 \rightarrow P(Z > 1.65) = 0.5 - 0.45 = 0.05$$

حال باتوجه به نکته $P(Z > A) = P(Z > B) \rightarrow A = B$ داریم:

$$(1), (2) \quad \frac{a-120}{40} = 1.65 \rightarrow a = 40 \times 1.65 + 120 = 186$$

34 ـ گزینه 3 صحیح است.

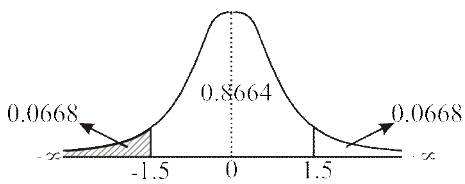
نمرات آزمون : $X \sim N(\mu = 66, \sigma^2 = 4^2)$

$$P(60 < x < 72) = P\left(\frac{60-66}{4} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{72-66}{4}\right) = P\left(-\frac{6}{4} < Z < \frac{6}{4}\right) =$$

$$P(-1.5 < Z < 1.5) = 1 - 2 \times 0.0668 = 0.8664 = \%86.64$$

راهنمایی : $\int_{-\infty}^{-1.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.0668$

$$\rightarrow \quad P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5) = 0.0668$$

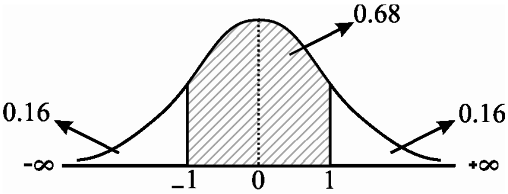


35 ــ گزینه 4 صحیح است.

نمرات ریاضی دانشجویان: $X : N\left(\mu = 14 , \sigma^2 = 16\right)$

$$P(x < 10) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{10-14}{\sqrt{16}}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{4}\right) = P(Z < -1) = 0.16$$

یادآوری:



36 ــ گزینه 4 صحیح است.

باید در صورت سؤال ذکر می‌شد که توزیع نمرات نرمال است اما باتوجه به راهنمایی مسئله می‌توان حدس زد که توزیع نمرات نرمال بوده است. نمرات: $X : N\left(\mu = 60 , \sigma^2 = 20^2\right)$

حال حداقل نمره قبولی وقتی 10% از شرکت‌کنندگان قبول شده‌اند. یعنی:

$$(1)\, P(x \geq a) = \%10 \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{a-60}{20}\right) = 0.1 \quad \rightarrow \quad P\left(Z \geq \frac{a-60}{20}\right) = 0.1$$

$$(2)\, \int_{-\infty}^{1.28} = 0.9 \quad \rightarrow \quad P(Z < 1.28) = 0.9 \quad \rightarrow \quad P(Z > 1.28) = 1 - 0.9 = 0.1$$

حال باتوجه به نکته $P(Z > A) = P(Z > B) \quad \rightarrow \quad A = B$ داریم:

$$(1), (2) \quad \frac{a-60}{20} = 1.28 \quad \rightarrow \quad a = 1.28 \times 20 + 60 = 85.6$$

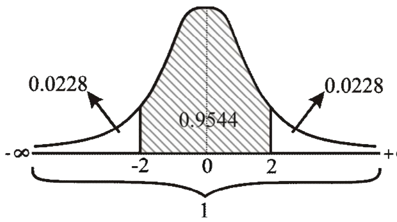
37 ــ گزینه 1 صحیح است.

$$X : N\left(\mu = 100 , \sigma^2 = 15^2\right)$$

$$P(x \geq 130) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{130-100}{15}\right) = P(Z \geq 2) = 0.0228$$

$$\int_{-2}^{+2} f(z)dz = 0.9544 \rightarrow P(-2 < Z < 2) = 0.9544$$

$$P(Z \geq 2) = P(Z \leq -2) = \frac{1 - P(-2 < Z < 2)}{2}$$
$$= \frac{1 - 0.9544}{2} = 0.0228$$



38 ــ گزینه 4 صحیح است.

به کتاب مرجع (عادل آذر) صفحه 271 مراجعه کنید.

نرمال استاندارد

39 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$\begin{cases} x=18 \xrightarrow{Z=\frac{x-\mu}{\sigma}} Z=1 \\ x=12 \xrightarrow{Z=\frac{x-\mu}{\sigma}} Z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{18-\mu}{\sigma}=1 \\ \frac{12-\mu}{\sigma}=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu+\sigma=18 \\ \mu-\sigma=12 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله جمع}} 2\mu=30 \quad \boxed{\mu=15}$$

حال با داشتن مقدار μ از روی یکی از دو معادله مقدار σ را به‌دست می‌آوریم.

$$\mu+\sigma=18 \xrightarrow{\mu=15} 15+\sigma=18 \rightarrow \boxed{\sigma=3}$$

تقریب توزیع دو جمله‌ای به نرمال

40 ـ گزینه 2 صحیح است.

هرگاه در توزیع دو جمله $np\ ,\ nq > 5$ باشند تقریب آن به نرمال مناسب خواهد بود. در عین حال برای n های کوچک $(n<30)$ هر چه p به 0.5 نزدیکتر باشد تقریب بهتر است.

گزینه 1) $n=20\ ,\ p=0.4 \rightarrow np=20\times0.4=8>5\ ,\ nq=20\times0.6=12>5$

گزینه 2) $n=20\ ,\ p=0.45 \rightarrow np=20\times0.45=9>5\ ,\ nq=20\times0.55=11>5$ **بهترین تقریب**

گزینه 3) $n=30\ ,\ p=0.25 \rightarrow np=30\times0.25=7.5>5, nq=30\times0.75=22.5>5$

گزینه 4) $n=5\ ,\ p=0.6 \rightarrow np=5\times0.6=3 \cancel{>} 5\ ,\ nq=5\times0.4=2 \cancel{>} 5$

در این سؤال هر چهار گزینه n های کوچک دارند اما در بین سه گزینه اول که برای تقریب مناسب‌اند، گزینه 2 چون p به 0.5 نزدیکتر است، بهترین تقریب خواهد بود.

تقریب توزیع پواسون به نرمال

41 ـ گزینه 3 صحیح است.

هرگاه توزیع پواسون به نرمال تقریب پذیرد پارامترهای آن $\mu=\sigma^2=\lambda$ است.

$$\begin{cases} \mu=\lambda=36 \\ \sigma^2=\lambda=36 \rightarrow \sigma=\sqrt{36}=6 \end{cases}$$

χ^2 کای ـ دو (خی‌دو، مربع کای، کای‌اسکور)

42 ـ گزینه 2 صحیح است.

$$X \sim N(\mu=0,\sigma^2=1)$$

یادآوری:هرگاه X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، توزیع X^2 مربع کای با یک درجه آزادی خواهد بود.

$$Y=X^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

43ـ گزینه 4 صحیح است.

$$\chi^2_{(n)} \to \begin{cases} E\left(\chi^2_{(n)}\right) = n \\ Var\left(\chi^2_{(n)}\right) = 2n \end{cases} \xrightarrow{n=5} \begin{cases} E\left(\chi^2_{(5)}\right) = 5 \\ Var\left(\chi^2_{(5)}\right) = 2\times 5 = 10 \end{cases}$$

فیشر

44ـ گزینه 3 صحیح است.

یادآوری :

$$1)\quad X_i \sim N(0,1) \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,n)$$

$$2)\quad X_i^2 \sim \chi^2_{(1)} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$3)\quad F_{n,m} = \frac{\chi^2_{(n)}}{\chi^2_{(m)}}$$

حال در این سؤال داریم:

$$X_1, X_2 \sim N(0,1)$$

بنابر یادآوری (1)

$$X_1 + X_2 \sim N(0,2)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(0,2)$$

حال با تبدیل توزیع نرمال به نرمال استاندارد داریم:

$$\frac{X_1 + X_2 - 0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \quad , \quad \frac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

حال بنابر یادآوری (2) داریم:

$$\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(X_1 + X_2)^2}{2} \sim \chi^2_{(1)} \quad , \quad \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2} \sim \chi^2_{(1)}$$

حال بنابر یادآوری (3) داریم:

$$\frac{\frac{(X_1 + X_2)^2}{2}}{\frac{(X_1 - X_2)^2}{2}} = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} \sim \frac{\chi^2_{(1)}}{\chi^2_{(1)}} \sim F_{1,1}$$